

Задача 9-1 Подобие и размерность.

1. Прочность троса подъемного крана пропорциональна площади поперечного сечения. При увеличении модели в n раз площадь (а значит, и прочность) увеличится в n^2 раз. Масса каждого кирпича увеличивается в n^3 раз. Таким образом, трос выдержит в n раз меньше кирпичей, т.е. N/n штук.

2. Мощность выделяемого в проволоке тепла обратно пропорциональна сопротивлению проволоки:

$$P = \frac{U^2}{R} \quad (1)$$

Сопротивление проволоки:

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (2)$$

При изменении всех размеров n раз, длина проволок увеличится в n раз, а площадь поперечного сечения – в n^2 раз. Т.е. сопротивление уменьшится в n раз, а мощность, наоборот увеличится в n раз.

Мощность тепловых потерь, в свою очередь, пропорциональна площади боковой поверхности проволоки и разности температур Δt проволоки и окружающей среды. При увеличении размеров, эта площадь увеличится в n^2 раз. Т.е. при одной и той же разности температур, большая проволока будет остывать в n раз быстрее.

Таким образом, для установления теплового равновесия, проволоке достаточно нагреться на $\Delta t/n$ градусов.

3. Масса шарика увеличится в n^3 раз. Поскольку сетка батута имеет радиальную структуру, растягиваются только веревки расположенные вдоль радиусов батута.

При увеличении размеров, площадь поперечного сечения веревок увеличивается в n^2 раз. А значит, во столько же раз увеличивается сила натяжения веревок батута. Величина провисания пропорциональна длине веревки. При одинаковой нагрузке, провисание тем больше, чем длиннее веревка, т.е. постоянным остается относительное удлинение. Отметим, что увеличение расстояния между веревками ничего не меняет

Итого: нагрузка увеличивается в n^3 , а «упругость» батута в n^2 раз. Значит, величина «относительного провисания» увеличится в n раз. А абсолютное провисание будет еще в n раз больше, т.е. $\Delta H = n^2 \Delta h$.

Задача 9-2 «Напряжения и токи»

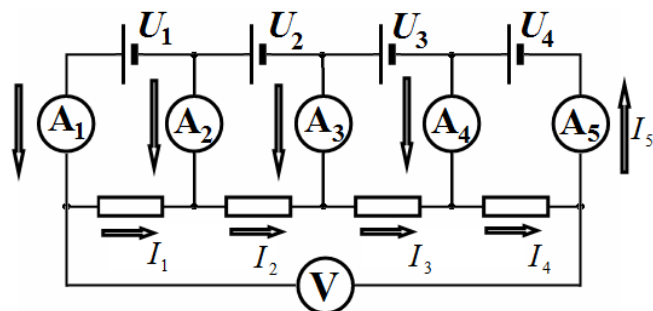
Часть 1.

Так как токи через амперметры A_1, A_2, A_3, A_4 одинаковы и $I_1 = 1,0 \text{ A}$, то в цепи резисторов идет «накопление» токов, поэтому

$$I_1 = 1,0 \text{ A}, \quad I_2 = 2,0 \text{ A}, \quad I_3 = 3,0 \text{ A}, \quad I_4 = 4,0 \text{ A}.$$

Этот суммарный ток протекает по пятому амперметру (только в противоположном направлении), поэтому $I_5 = 4,0 \text{ A}$. Напряжения на резисторах пропорциональны силам токов через них, поэтому суммарное напряжение, которое покажет вольтметр равно

$$U = I_1 R + I_2 R + I_3 R + I_4 R = 10 \text{ B}.$$



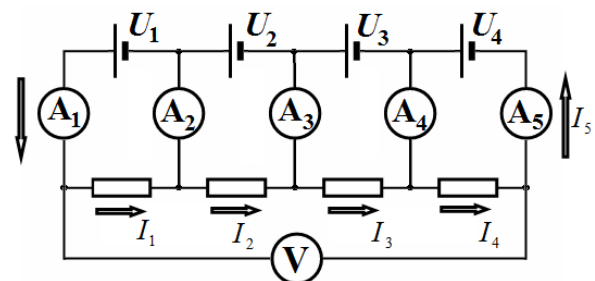
Часть 2.

Так как напряжения источников одинаковы и равны $U_0 = 1,0 \text{ B}$, и сопротивления всех резисторов одинаковы, то силы токов через них будут одинаковы и равны

$$I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = \frac{U_0}{R} = 1,0 \text{ A}.$$

Следовательно, токи через амперметры A_2, A_3, A_4 не идут, (они показывают нули), токи через амперметры A_1 и A_5 текут в противоположных направлениях, их силы равны $I_1 = 1,0 \text{ A}$.

Напряжение на вольтметре равно сумме напряжений на резисторах и равно $U = 4I_1 R = 4,0 \text{ B}$.

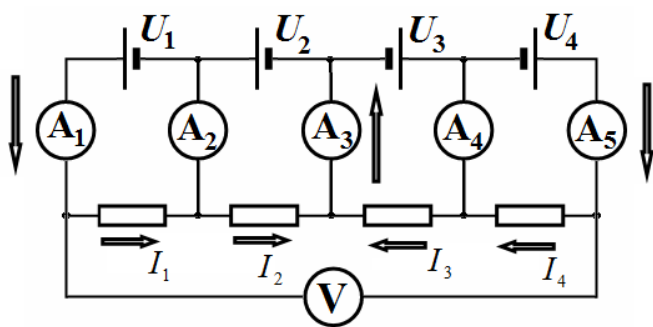


Часть 3.

Направления токов в данном случае показаны на рисунке. Так как напряжения на все резисторах по модулю равны, то и силы токов через них по модулю одинаковы и равны

$$I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = \frac{U_0}{R} = 1,0 \text{ A}$$

Следовательно, токи через амперметры A_2 и A_4 не идут. Силы токов чрез Амперметры A_1 и A_5 показывают силу тока в $I_1 = 1,0 \text{ A}$, сила тока через амперметр A_3 в два раза больше $I_{A_3} = 2,0 \text{ A}$. Так как напряжения на резисторах противоположны, то вольтметр показывает нуль $U = 0$



Задача 9-3 Гук против Архимеда!

Часть 1. Вспомним закон Гука.

Запишем условия равновесия груза на каждой пружине

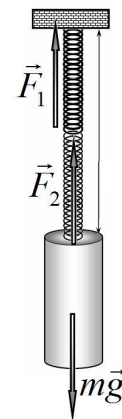
$$\begin{aligned} k_1 \eta_1 l &= mg \\ k_2 \eta_2 l &= mg \end{aligned} \quad (1)$$

1.1 Если пружины соединены последовательно, их силы упругости будут равны между собой и равны силе тяжести, действующей на груз. Следовательно, относительные удлинения пружин останутся теми же. Поэтому суммарное удлинение двойной пружины будет равно

$$\Delta l = \eta_1 l + \eta_2 l. \quad (2)$$

Длина составной недеформированной пружины в нерастянутом состоянии равна $2l$, следовательно, ее относительная деформация

$$\eta = \frac{\Delta l}{2l} = \frac{\eta_1 + \eta_2}{2}. \quad (3)$$



1.2 При параллельном соединении пружин их удлинения будут одинаковы, поэтому одинаковы и относительные деформации. Суммарная сила упругости пружин должна уравновешивать силу тяжести, поэтому условия равновесия груза, подвешенного на двух пружинах, имеет вид

$$k_1 \eta l + k_2 \eta l = mg. \quad (4)$$

Выражая из формул (1) значения жесткостей пружин

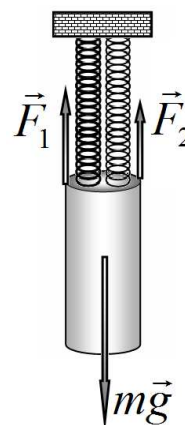
$$k_1 = \frac{mg}{\eta_1 l}, \quad k_2 = \frac{mg}{\eta_2 l}$$

и подставляя в выражение (4), получим

$$\frac{mg}{\eta_1 l} \eta l + \frac{mg}{\eta_2 l} \eta l = mg \Rightarrow \eta = \frac{\eta_1 \eta_2}{\eta_1 + \eta_2}. \quad (5)$$

Отметим, что формуле (5) можно придать «красивый» вид

$$\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} = \frac{1}{\eta}. \quad (6)$$



Часть 2. Вспомним закон Архимеда.

Силу тяжести, действующей на каждый сосуд можно выразить из условия плавания каждого из сосудов

$$\begin{aligned} m_1 g &= \rho g V \eta_1 \\ m_2 g &= \rho g V \eta_2 \end{aligned} \quad (1)$$

Если сосуды связаны, то условия равновесия при плавании имеет вид

$$(m_1 + m_2) g = 2 \rho g V \eta, \quad (2)$$

Где η - доля объема погруженной части обоих сосудов.

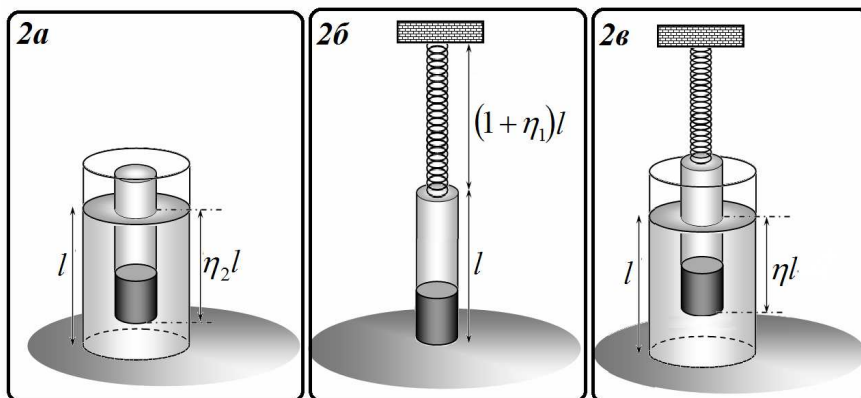
Из этих уравнений следует, что

$$\eta = \frac{\Delta l}{2l} = \frac{\eta_1 + \eta_2}{2}. \quad (3)$$

Заметим, что этот результат не зависит от того, как связаны сосуды (даже если они связаны перпендикулярно!). Так как сила Архимеда в любом случае должна удовлетворять соотношению (2)

Часть 3. Гук против Архимеда.

Сравним положения цилиндра в положениях 2б и 2в: цилиндр приподнялся на высоту $\Delta h = l - \eta l$. При этом уменьшилась сила упругости пружины.



Понятно, что это уменьшение силы упругости скомпенсировано действием силы Архимеда. Эти рассуждения можно выразить уравнением

$$kl(1 - \eta) = \rho g V \eta \quad (1)$$

Неизвестные параметры систему можно выразить из условия плавания (без пружины):

$$mg = \rho g V \eta_2 \Rightarrow \rho g V = \frac{mg}{\eta_2} \quad (2)$$

и условия равновесия на пружине (без воды):

$$mg = kl\eta_1 \Rightarrow kl = \frac{mg}{\eta_1}. \quad (3)$$

Подстановка этих выражений в уравнение (1) и его последующее решение приводит к требуемому результату:

$$\frac{mg}{\eta_1} (1 - \eta) = \frac{mg}{\eta_2} \eta \Rightarrow \eta = \frac{\eta_2}{\eta_1 + \eta_2}. \quad (4)$$

3.2 Подстановка численных значений дает следующие величины относительного погружения.

1) $\eta_1 = 0,30$: $\eta = \frac{\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} = \frac{0,80}{0,80 + 0,30} = 0,73$, что меньше погружения при отсутствии

пружины. Следовательно, в новом положении равновесия пружина еще остается растянутой и приподнимает цилиндр.

2) $\eta_1 = 0,20$: $\eta = \frac{\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} = \frac{0,80}{0,80 + 0,20} = 0,80$. В этом случае цилиндр плавает на той же

глубине, что и без пружины. Не сложно показать, что в этом положении пружина не деформирована, поэтому не оказывает никакого воздействия на плавающий цилиндр.

3) $\eta_1 = 0,10$: $\eta = \frac{\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} = \frac{0,80}{0,80 + 0,10} = 0,89$. Здесь пружина оказывается сжатой,

поэтому дополнительно вталкивает цилиндр в воду.

Задача 10-1 Подобие и размерность.

1. Физические величины, которые определяют форму капли это: плотность воды, поверхностное натяжение, радиус капли и ускорение свободного падения. Основная задача, как следует из подсказки, найти безразмерную комбинацию этих величин. Приведем единицы измерения величин к основным единицам СИ.

$$[\rho] = \text{кг}/\text{м}^3, [\sigma] = \text{Н}/\text{м} = \text{кг}/\text{с}^2, [R] = \text{м}, [g] = \text{м}/\text{с}^2.$$

Очевидно, из этих величин можно составить единственную безразмерную комбинацию:

$$\frac{\rho R^2 g}{\sigma}.$$

Таким образом, формы капель будут подобными, если: $\frac{\rho_1 R_1^2}{\sigma_1} = \frac{\rho_2 R_2^2}{\sigma_2}$.

2. В данном явлении фигурируют следующие физические величины:

$$[p] = \text{Па} = \text{кг}/\text{с}^2 \text{ м} - \text{давление внутри звезды};$$

$$[M] = \text{кг} - \text{масса звезды};$$

$$[R] = \text{м} - \text{радиус};$$

$$[G] = \text{Нм}^2/\text{кг}^2 = \text{м}^3/\text{с}^2 \text{ кг} - \text{гравитационная постоянная, определяющая силу взаимодействия}.$$

Найти безразмерную комбинацию в этом случае не очень просто. Поэтому предположим, что безразмерная комбинация имеет вид: $p^a M^b R^c G^d$. И попытаемся определить такие значения a, b, c, d , при которых это произведение будет безразмерной величиной. Подставляя единицы измерения, получим комбинацию:

$$\frac{\text{кг}^a}{\text{с}^{2a} \text{ м}^a} \text{кг}^b \text{ м}^c \frac{\text{м}^{3d}}{\text{с}^{2d} \text{ кг}^d} \quad (1).$$

Рассматривая каждую единицу измерения по отдельности, получим:

$$\begin{cases} a + b - d = 0 \\ -a + c + 3d = 0 \\ -2a - 2d = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Система, безусловно, имеет бесчисленное множество решений. Однако нам необходимо найти хотя бы одно. Для этого предположим, например, что $a = 1$. Тогда:

$$d = -1, b = -2, c = 4 \quad (3).$$

Т.е. искомая безразмерная комбинация имеет вид: $\frac{pR^4}{GM^2}$.

Таким образом, между массами и радиусами звезд с одинаковым давлением внутри, должно выполняться соотношение:

$$\frac{R_1^2}{M_1} = \frac{R_2^2}{M_2} \quad (4)$$

При решении этой задачи мы пренебрегли действием светового излучения, давление которого может быть достаточно существенно.

3. Физические величины, определяющие явление:

$$[\rho] = \text{кг}/\text{м}^3 - \text{плотность воды};$$

$$[h] = \text{м} - \text{высота водослива};$$

$[q] = \text{кг}/\text{с}$ - расход;

$[g] = \text{м}/\text{с}^2$.

Проводя рассуждения аналогичные второй задаче, найдем безразмерную комбинацию: $\frac{q}{\rho g^{1/2} h^{5/2}}$.

Таким образом, можно сделать вывод, что расход пропорционален высоте в степени $5/2$. И при увеличении перепада высот в 2 раза, расход увеличится в $\approx 5,7$ раз.

Задача 10-2 Полетели?

1.1 В момент старта сила тяги, очевидна равна силе тяжести

$$F_p = Mg \quad (1)$$

Численное значение $F_p = 45 \cdot 10^3 \cdot 10 = 45 \cdot 10^4 \text{ Н} = 450 \text{ кН}$

1.2 Проще всего доказать эту формула в системе отсчета связанной с ракетой в какой-то малый промежуток времени. В этой системе продукты сгорания получают импульс $\mu \Delta t \cdot u$. Следовательно, и ракета получает такой же импульс (только в противоположном направлении) Разделив это выражение на малый промежуток времени Δt получим требуемое выражение для силы тяги. Так как величина силы не зависит от выбора инерциальной системы отсчета, то это выражение справедливо для любого момента времени и любой скорости ракеты.

1.3 Так как в начальный момент времени сила тяги равна силе тяжести, то расход топлива можно найти из этого условия

$$\mu u = Mg \Rightarrow \mu = \frac{Mg}{u}, \quad \mu = 150 \frac{\text{кг}}{\text{с}} \quad (2)$$

1.4 Мощность двигателя ракеты: $P = \frac{A}{\Delta t}$, где A – работа, совершенная силами давления

продуктов сгорания в камере сгорания двигателя за промежуток времени Δt . По теореме о кинетической энергии эта работа равна изменению кинетической энергии продуктов сгорания и ракеты. В момент старта ракета покоилась, поэтому:

$$A = \frac{\Delta m u^2}{2} \Rightarrow P = \frac{\Delta m u^2}{2 \Delta t} = \frac{\mu u^2}{2} = \frac{Mgu}{2} \quad (3)$$

$$P = \frac{45 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 3000}{2} = 675 (\text{МВт}).$$

1.5 К моменту времени t после старта масса ракеты уменьшилась и стала равна $M - \mu t$.

По второму закону Ньютона:

$$F_p - (M - \mu t)g = (M - \mu t)a.$$

Учитывая полученные ранее выражения для силы тяги и расхода топлива, получаем:

$$Mg - \left(M - \frac{Mg}{u} t \right) g = \left(M - \frac{Mg}{u} t \right) a \Rightarrow$$
$$a = \frac{g^2 t}{v - gt} \quad (4)$$

В таблице 1 приведены рассчитанные по формуле (8) значения $a(t)$. На рисунке 2 приведен график зависимости $a(t)$ с линейной аппроксимацией между расчетными точками.

1.6 Время работы двигателя определяется скоростью расхода топлива:

$$t_m = \frac{kM}{\mu} = \frac{ku}{g}; \quad (9)$$

$$t_m = \frac{0,9 \cdot 3000}{10} = 270(\text{с}).$$

1.7 Скорость u может быть получена как площадь фигуры, ограниченной осью времени и графиком $a(t)$. Учитывая линейную зависимость $a(t)$ между точками t_{n-1} и t_n , получим для значений скорости:

$$u_n = u_{n-1} + \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_n)\Delta t. \quad (10)$$

Полученные значения приведены в таблице 1. Максимальная скорость ракеты

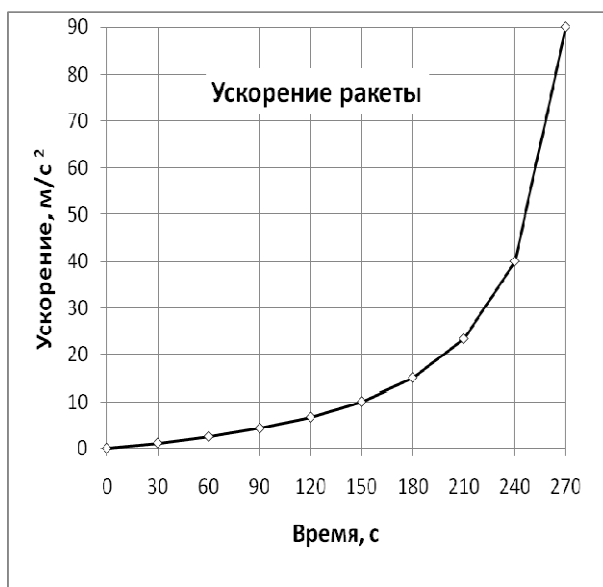
$$u_{\max} = 4400 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

1.8 Высота, которой достигает ракета, рассчитывается аналогично, используя график зависимости $u(t)$ с линейной аппроксимацией между расчетными точками:

$$h_n = h_{n-1} + \frac{1}{2}(u_{n-1} + u_n)\Delta t. \quad (11)$$

Полученные значения приведены в таблице 1.

$t, \text{с}$	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270
$a, \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$	0,0	1,1	2,5	4,3	6,7	10,0	15,0	23,3	40,0	90,0
$u, \frac{\text{м}}{\text{с}}$	0,0	17	71	173	337	587	962	1537	2487	4437
$h, \text{м}$	0,0	250	1563	5214	12857	26714	49946	87429	147786	251643





Двигатель расходует весь запас топлива на высоте $H = 250$ км .

1.9 Максимальная высота подъема ракеты: $z_{\max} = H + \frac{u_{\max}^2}{2g} = 1240$ км .



Задача допускает и точное решение, требующее знакомства с высшей математикой (не для участников)

Для скорости:

$$u(t) = \int_0^t a(t) dt \Rightarrow u(t) = \int_0^t \frac{g^2 t}{v - gt} dt \Rightarrow u(t) = v \ln\left(\frac{v}{v - gt}\right) - gt. \quad (12)$$

Для высоты:

$$h(t) = \int_0^t u(t) dt \Rightarrow h(t) = \int_0^t \left(v \ln\left(\frac{v}{v - gt}\right) - gt \right) dt \Rightarrow h(t) = vt + v \frac{v - gt}{g} \ln\left(\frac{v - gt}{v}\right) - \frac{gt^2}{2}.$$

Расчетные данные по формулам (12) и (13) приведены в таблице 2:

t, c	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270
$u, \frac{M}{c}$	0	16	69	170	332	579	949	1512	2428	4208
h, m	0	158	1337	4795	12154	25584	48135	84427	142301	238267

Различия незначительны!

Задача 10-3 Сначала думать, а потом делать!

Часть 1. Термодинамика тепловой машины.

Рассчитаем необходимые для дальнейшего параметры машины:

Гидростатическое давление воды:

$$p_0 = \rho gh = 1,0 \cdot 10^4 \text{ Па} = 0,10 \text{ атм}; \quad (1)$$

Давление поршня:

$$p_1 = \frac{mg}{S} = 1,0 \cdot 10^4 \text{ Па} = 0,10 \text{ атм}; \quad (2)$$

Объем бака нагревателя:

$$V_0 = S \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 h = 9,0 \text{ м}^3; \quad (3)$$

Количество молей рабочего воздуха (из уравнения состояния $PV = \nu RT$):

$$\nu = \frac{PV}{RT} = \frac{(P_0 + p_0 + p_1)V_0}{RT_1} = \frac{1,2 \cdot 10^5 \cdot 9}{8,31 \cdot 300} = 433 \text{ моль}. \quad (4)$$

1.3 Построим теперь диаграмму процесса работы водоподъемной машины. Для удобства дальнейших расчетов параметры рабочего воздуха в узловых точках будем заносить в Таблицу 1, сразу же рассчитывая и их численные значения. Объемы и давления в этих точках определяются устройством машины, а температуру удобно рассчитывать с помощью уравнения Клапейрона

$$T = T_1 \frac{PV}{P_1 V_1}. \quad (5)$$

В этой формуле давления можно считать в атмосферах. Объем газа при конкретном значении z равен $V = V_0 + Sz$, численно $V = (9 + z)$. Результаты очевидных расчетов приведены в таблице и «без комментариев»

В начальном состоянии 1, давление газа должно обеспечить подъем поршня, поэтому равно $P_0 + p_0 + p_1$, объем равен объему бака, температура задана.

До тех пор, пока вода не начнет выливаться (то есть пока z не достигнет значения h), процесс расширения будет изобарным (участок 1-2).

После того, как вода начнет выливаться давление будет убывать по линейному закону (участок 2-3):

$$P_{2 \rightarrow 3}(z) = P_0 + p_0 + p_1 - \frac{P_0}{h}(z - h) = P_0 + 2p_0 + p_1 - \frac{P_0}{h}z = 1,3 - 0,1z \quad (6)$$

При этом температура будет изменяться по закону

$$\begin{aligned} T_{2 \rightarrow 3}(z) &= T_1 \frac{PV}{P_1 V_1} = T_1 \frac{\left(P_0 + 2p_0 + p_1 - \frac{P_0}{h}z \right) (V_0 + Sz)}{(P_0 + p_0 + p_1)V_0} = 300 \frac{(1,3 - 0,1z)(9 + z)}{1,2 \cdot 9} = \\ &= 27,8(1,3 - 0,1z)(9 + z) \end{aligned} \quad (7)$$

Важно отметить, что эта зависимость квадратичная, причем с отрицательным коэффициентом при высшей степени, поэтому имеет точку экстремума. Но Феде «повезло» - точка экстремума (которую для параболы можно найти, как середину отрезка между корнями. Она оказалась равной $z^* = \frac{13-9}{2} = 2$, точно на конце рассматриваемого интервала. Следовательно, на всем участке 2-3 температура возрастает.

На следующем участке 3-4 процесс также изобарный, давление равно сумме атмосферного давления и давления, оказываемого поршнем.

Наконец, на последнем участке, когда вода наливается, давление возрастает по линейному закону

$$P_{4 \rightarrow 1}(z) = P_1 + \frac{P_4 - P_1}{z_4} z = P_0 + p_0 + p_1 - \frac{p_0}{h} z = 1,2 - 0,1z. \quad (8)$$

Температура на участке изменяется по закону

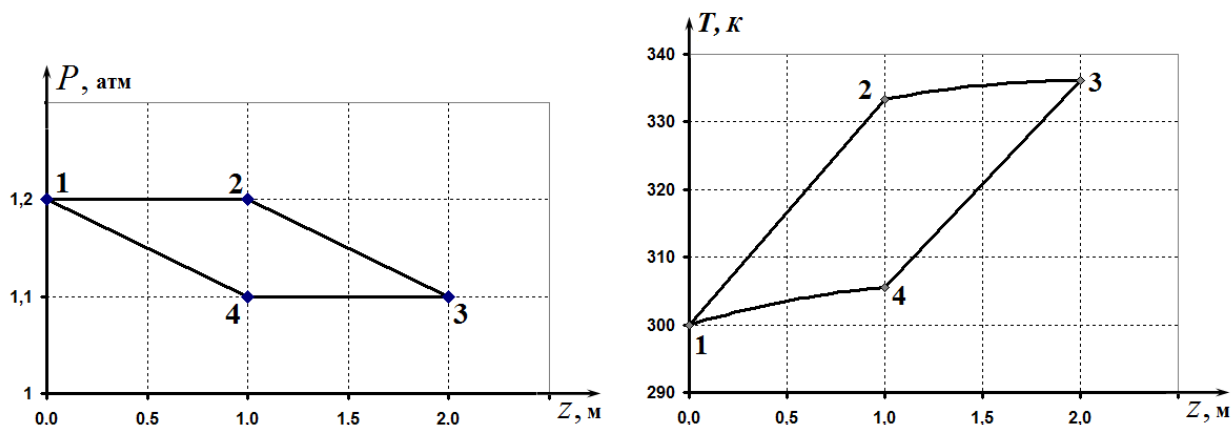
$$T_{4 \rightarrow 1}(z) = T_1 \frac{PV}{P_1 V_1} = T_1 \frac{\left(P_0 + p_0 + p_1 - \frac{p_0}{h} z\right)(V_0 + Sz)}{(P_0 + p_0 + p_1)V_0} = 300 \frac{(1,2 - 0,1z)(9 + z)}{1,2 \cdot 9} = 27,8(1,3 - 0,1z)(9 + z) \quad (9)$$

Экстремум этой функции также лежит вне пределов рассматриваемого интервала.

Таблица 1 Состояния

№	P (атм)		V (м ³)		T (K)	
	1	$P_0 + p_0 + p_1$	1,2	V_0	9	T_1
2	$P_0 + p_0 + p_1$	1,2	$V_0 + Sh$	10	$T_2 = T_1 \frac{V_2}{V_1}$	333
3	$P_0 + p_1$	1,1	$V_0 + 2Sh$	11	$T_3 = T_1 \frac{P_3 V_3}{P_1 V_1}$	336
4	$P_0 + p_1$	1,1	$V_0 + Sh$	10	$T_4 = T_1 \frac{P_4 V_4}{P_1 V_1}$	306

Диаграммы процессов в требуемых координатах показаны на рисунке.



Проведем расчет термодинамических характеристик всех участков циклического процесса. Результаты расчетов (в том числе численных) также удобно заносить в таблицу 2. Изменение внутренней энергии газа удобно (и быстро) рассчитывать по формуле

$$\Delta U = \frac{5}{2} \nu R \Delta T = \frac{5}{2} \Delta(PV). \quad (10)$$

Если подставить численные значения параметров, то эта формула упрощается

$$\Delta U = \frac{5}{2} \Delta(PV) = 250 \Delta(PV) \text{ кДж, при давлении в атм.}$$

Работу на каждом участке легко рассчитать, как площадь под графиком соответствующего участка на диаграмме (P, z) . Количество теплоты равно сумме изменения внутренней энергии и совершенной работы. Удобно в таблицу заносить все эти величины с учетом

знака, считая всегда работу, совершенную газом и теплоту, полученную газом (т.е. если газ отдает теплоту, она автоматически оказывается отрицательной).

Результаты расчетов приведены в Таблице 2.

Таблица 2 Процессы

Процесс	Уравнение	ΔU , кДж	A , кДж	Q , кДж
1-2	$P = P_0 + p_0 + p_1$	+300	+120	+420
2-3	$P = P_0 + 2p_0 + p_1 - \frac{p_0}{h}z = 1,3 - 0,1z$	+25	+115	+140
3-4	$P = P_0 + p_1$	-275	-110	-385
4-1	$P_{4 \rightarrow 1}(z) = P_0 + p_0 + p_1 - \frac{p_0}{h}z = 1,2 - 0,1z$	-50	-115	-165
	Сумма	0	10	10

Последняя «суммирующая» строка позволяет проконтролировать правильность расчетов: суммарное изменение внутренней энергии равно нулю, а суммарная работа равна суммарному количеству теплоты.

Теперь легко вычислить коэффициент полезного действия машины (суммируя только положительные значения количеств теплоты)

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{10}{560} = 0,018 = 1,8\% . \quad (11)$$

Совсем малая величина!

Часть 2. Кинематика тепловой машины.

Для расчета кинематических характеристик движения поршня следует учесть, что мощности поступающей и теряемой теплоты постоянны. Поэтому на участке нагрева время достижения какого-либо состояния определяется по формуле

$$t = \frac{Q}{N_1 - N_2} , \quad (12)$$

Где Q - количество теплоты, полученной от начала процесса до этого состояния.

При остывании времена можно рассчитывать по аналогичной формуле

$$\Delta t = \frac{|\delta Q|}{N_2} , \quad (13)$$

На участках 1-2 и 3-4 количество теплоты изменяется с изменением координаты по линейному закону, следовательно, на этих участках поршень движется равномерно.

Строго говоря, на участках 2-3 и 4-1 движение является неравномерным, так Q зависит квадратично от координаты. Однако, из диаграммы процесса (T, z) видно, что эта зависимость близка к линейной. Поэтому можно приближенно считать и здесь движение равномерным. На



рисунке показан график закона движения (рассчитанный точно). Видно, что, действительно, отклонения от линейного закона незначительно, причем времена в узловых точках рассчитываются точно, независимо от закона движения поршня.

Общее время совершения цикла оказалось равным $\tau = 690c$ (более 10 минут!). И за это время совершается работа в 10 кДж. Поэтому средняя мощность, развиваемая машиной равна

$$N = \frac{A}{\tau} = 14,5 \text{ Вт} . \quad (13)$$

Средняя мощность, потребляемая нагревателем, находится по формуле

$$\langle N \rangle = \frac{N_1 \tau_1}{\tau} = 1,0 \cdot 10^3 \text{ Вт} \quad (14)$$

Таким образом, реальный КПД оказывается еще меньше $\eta = 1,4\%$.

Различие обусловлено тем обстоятельством, что при термодинамическом расчете учитывается теплота поступающая к газу и не учитываются потери этой теплоты во время разогрева!

Таким, образом, решение окончательно принятой Федей обосновано: машина работает медленно и очень неэкономно!

Задача 11-1 Подобие и размерность.

1. Запишем Второй закон Ньютона:

$$ma = -k\sqrt{x} + g \quad (1).$$

При изменении пространственного и временного масштабов, уравнение примет вид:

$$m \frac{\beta^2}{\alpha} a = -k \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{x} + \frac{\beta^2}{\alpha} g \quad (2).$$

Заметим, что коэффициент $\frac{\beta^2}{\alpha}$ должен также присутствовать при ускорении свободного падения. А можно было сразу отбросить слагаемое g , т.к. известно, что наличие постоянной силы приводит только к смещению положения равновесия.

Уравнение (2) будет таким же, как и (1) при условии, что:

$$\beta^2 = \sqrt{\alpha} \quad (3).$$

Т.е. период колебаний будет пропорционален корню четвертой степени от амплитуды:

$$T \sim \sqrt[4]{A} \quad (4).$$

2. Полная энергия падающего тела:

$$\frac{mv^2}{2} + C \cdot r^n = E \quad (5)$$

В новых единицах измерения:

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2} \frac{mv^2}{2} + C \frac{1}{\alpha^n} r^n = E \quad (6)$$

или

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2} \left(\frac{mv^2}{2} + C \frac{\alpha^{2-n}}{\beta^2} r^n \right) = E \quad (7).$$

Следовательно, одинаковость решений реализуется при:

$$\beta^2 = \alpha^{2-n} \quad (8).$$

Время падения в силовой центр:

$$T \sim A^{1-n/2} \quad (9).$$

3. Уравнение колебаний имеет вид:

$$L \frac{\Delta I}{\Delta t} + Cq^2 = 0 \quad (10).$$

Выбрав новые единицы измерения времени и заряда ($\tilde{q} = \frac{q}{a}$), получим:

$$\frac{\beta^2}{\alpha} L \frac{\Delta I}{\Delta t} + C \frac{1}{\alpha^2} q^2 = 0 \quad (11).$$

Одинаковое решение (10) и (11) будет при:

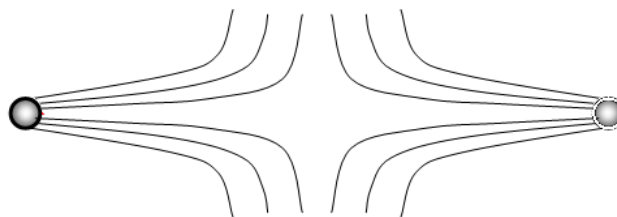
$$\beta^2 = 1/\alpha \quad (12).$$

Таким образом, период колебаний обратно пропорционален корню квадратному из амплитуды заряда на конденсаторе:

$$T \sim 1/\sqrt{\alpha} \quad (13).$$

Задача 11-2 Электромагнитная сила Кориолиса.

1.1 Схематическая картина силовых линий электрического поля, создаваемого кольцом в вертикальной плоскости, проходящей через центр кольца имеет вид:

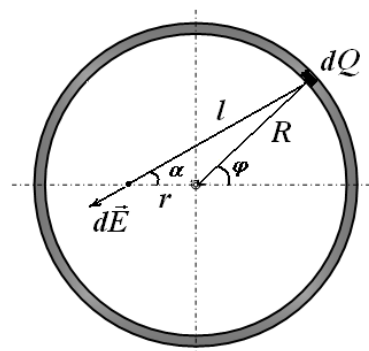


1.2 Для доказательства выражения (1) рассмотрим малый элемент кольца, несущий заряд dq и найдем его вклад в результирующий вектор напряженности поля

$$dE_x = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{l \cos \alpha}{l^3} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{r + R \cos \varphi}{(R^2 + r^2 + 2rR \cos \varphi)^{3/2}}. \quad (2)$$

При выполнении условия $r \ll R$ выражение (2) можно разложить по малому параметру и использовать приближенную формулу $(1 + \xi)^{-3/2} = 1 - \frac{3}{2}\xi$.

Суммируя по всем углам φ и учитывая, что среднее значение функции $y = \cos \varphi$ на промежутке $[0, 2\pi]$ равно нулю, получим, а функции $y = \cos^2 \varphi$ среднее значение равно $\frac{1}{2}$, получим

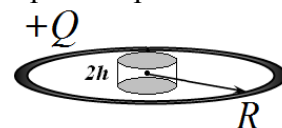


$$E = \int dE_x = \int \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{l \cos \alpha}{l^3} = \int \frac{r + R \cos \varphi}{R^3 (1 + 2\frac{r}{R} \cos \varphi)^{3/2}} \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0} \approx \int \frac{(r + R \cos \varphi)}{R^3} (1 - 3\frac{r}{R} \cos \varphi) \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0} = \frac{Qr}{8\pi\epsilon_0 R^3}. \quad (3)$$

Можно рассуждать и иначе, используя теорему Гаусса, выходящую, правда, за рамки школьной программы. Суммируя элементарные напряженности, создаваемые малыми элементами на оси кольца зарядом Q и радиусом R на расстоянии h от его центра, получим, что вектор результирующего поля направлен вдоль оси кольца и равен по модулю

$$E(h) = \frac{Qh}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + h^2)^{3/2}}.$$

Для доказательства формулы (1) рассмотрим поток вектора напряженности электрического поля кольца (в отсутствие маятника) через небольшой цилиндр малой высоты ($h \rightarrow 0 \Rightarrow h \ll R$), центр симметрии которого находится в центре кольца.



Модуль вектора напряженности электрического поля на верхнем (нижнем) торце цилиндра по модулю равен

$$E(h) = \frac{Qh}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + h^2)^{3/2}} \approx (h \rightarrow 0) \approx \frac{Qh}{4\pi\epsilon_0 R^3}. \quad (4)$$

Согласно теореме Гаусса для данной замкнутой поверхности (цилиндра) имеем

$$2\pi r^2 E(h) + \Phi_{\text{бок}} = 0. \quad (5)$$

Выражая из (5) поток $\Phi_{\text{бок}}$ вектора напряженности электрического поля через боковую поверхность рассматриваемого цилиндра и учитывая, что он равен $\Phi_{\text{бок}} = E(r) \cdot 2\pi r h$, окончательно получаем

$$E(r) = \frac{2\pi r^2 E(h)}{2\pi r h} = \frac{r}{h} \cdot \frac{Qh}{4\pi\epsilon_0 R^3} = -\frac{r}{2} \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3}. \quad (6)$$

Знак «-» в выражении (3) говорит о том, что вектор напряженности $\vec{E}(\vec{r})$ направлен к центру кольца. Следовательно, в векторном виде можем записать искомое выражение из условия

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\vec{r}}{2} \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3}. \quad (7)$$

1.3 Для нахождения периода малых колебаний заряженного небольшого шарика ($q > 0$) рассмотрим его небольшое отклонение от положения равновесия. В этом случае уравнение движения примет вид

$$m\ddot{x}(t) = -\frac{mg}{l}x(t) - \frac{x(t)}{2} \cdot \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^3}, \quad (8)$$

$$\ddot{x}(t) = -\left(\frac{g}{l} + \frac{1}{2m} \cdot \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^3}\right)x(t) = -\omega^2 x(t). \quad (9)$$

Период таких колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\left(\frac{g}{l} + \frac{1}{2m} \cdot \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^3}\right)^{-1}} = 2\pi \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{g}{l} + \frac{1}{2m} \cdot \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^3}\right)}} \text{ с} \quad (10)$$

Как видим из формулы (10), при положительном заряде шарика колебания возможны всегда. При отрицательном заряде выражение под корнем может стать отрицательным. В этом случае положения равновесия в центре кольца становится не устойчивым, при котором колебания невозможны.

Перепишем формулу для периода колебаний в виде

$$T = 2\pi \sqrt{\left(\frac{g}{l} + \frac{1}{2m} \cdot \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^3}\right)^{-1}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \left(1 + \frac{l}{2mg} \cdot \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^3}\right)^{-1}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 + \beta}}, \quad (11)$$

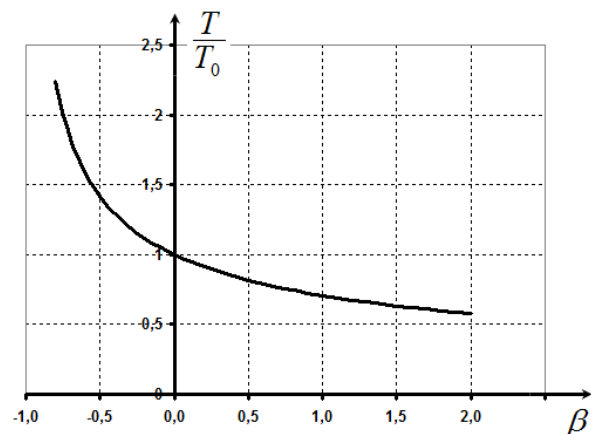
где $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ - период колебаний

свободного маятника, $\beta = \frac{l}{2mg} \cdot \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^3}$ -

параметр, пропорциональный заряду шарика. Колебания становятся невозможными при

$$q \leq -\frac{8\pi\epsilon_0 mg R^3}{Ql}. \quad (12)$$

Представление зависимости в форме (11) позволяет достаточно просто построить ее график, который показан на рисунке.



Для численных оценок влияния заряда на период колебаний маятника следует оценить параметр β . Оценку возможного заряда шарика, найдем, считая, что с помощью электрофорной машины шарик можно сообщить максимальный потенциал. Следовательно, найдем заряд шарика от электростатической машины

$$q = 4\pi\epsilon_0 rU \approx 4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 25 \cdot 10^3 \approx 1,4 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}.$$

Будем считать, что такой же заряд можно сообщить и кольцу.

Масса такого шарика $m = \frac{\pi d^3}{6} \rho \approx 4 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$

Тогда параметр β оценивается как $\beta = \frac{l}{2mg} \cdot \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^3} \approx 2 \cdot 10^{-3}$. Так как эта величина мала, то формулу для периода колебаний можно записать как

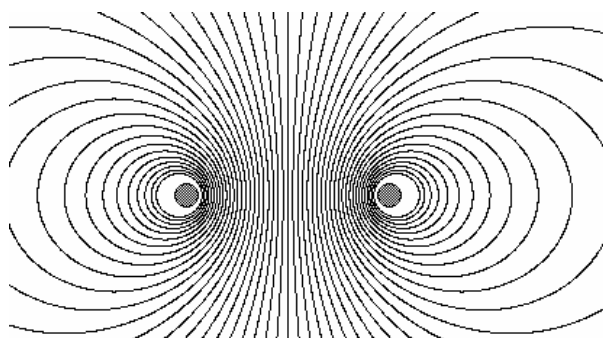
$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1+\beta}} \approx T_0 \left(1 - \frac{\beta}{2}\right). \quad (13)$$

Откуда следует, что период колебаний может измениться на величину порядка 0,1%.

Часть 2. Магнитная сила.

2.1

Картина силовых линий магнитного поля, создаваемого кольцом имеет вид (это результат точного расчета). Вектор индукции в плоскости кольца направлен перпендикулярно этой плоскости.



2.2 По теореме Био-Савара вклад малого элемента тока в индукцию поля в центре кольца рассчитывается по формуле

$$B_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \Delta l_i}{R^2}. \quad (14)$$

Суммируя выражение (11) по малым участкам, получаем

$$B = \sum_i B_i = \sum_i \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \Delta l_i}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \sum_i \Delta l_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \cdot 2\pi R = \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{R}.$$

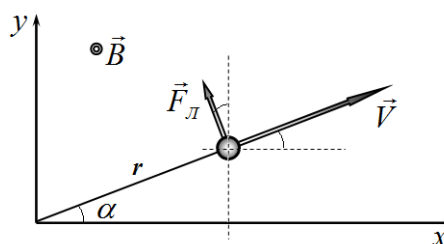
Заметим, что данная формула приведена в школьном учебнике «Физика -11» (2008 г., стр. 156).

Из симметрии задачи следует, что в центре кольца индукция магнитного поля имеет экстремум (максимум), поэтому при отклонении от центра на малую величину r индукция поля будет изменяться на величину порядка r^2 . Следовательно, с точностью до малых величин первого порядка поле можно считать однородным.

2.4 В магнитном поле на движущийся шарик действует сила Лоренца $F_L = qVB$, направленная перпендикулярно вектору скорости. Так колебания считаем малыми, то выходом шарика из плоскости кольца следует пренебрегать.

Пусть в некоторый момент времени вектор скорости частицы направлен под углом α к оси Ox . Тогда проекции силы Лоренца на оси координат будут иметь вид

$$\begin{aligned} F_x &= -qVB \sin \alpha = -qBV_y \\ F_y &= qVB \cos \alpha = qBV_x \end{aligned} \quad (15)$$



Тогда на основании 2 закона Ньютона можно записать уравнения, определяющие движение шарика (с учетом горизонтальной составляющей силы тяжести $mg \frac{r}{l}$, где r - расстояние до центра кольца):

$$\begin{aligned} a_x &= -\frac{g}{l}x - \frac{qB}{m}V_y \\ a_y &= -\frac{g}{l}y + \frac{qB}{m}V_x \end{aligned} \quad (16)$$

Обозначим частоту колебаний маятника в отсутствие магнитного поля через $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, а величину $\omega_B = \frac{qB}{m}$ называют циклотронной частотой. С учетом этих обозначений система уравнений (16) переписется в виде

$$\begin{aligned} a_x &= -\omega_0^2 x - \omega_B V_y \\ a_y &= -\omega_0^2 y + \omega_B V_x \end{aligned} \quad (17)$$

Заметим, что условие малости силы Лоренца эквивалентно условию $\omega_B \ll \omega_0$.

Качественно доказать наличие вращения можно следующим образом. Пусть маятник «стартует» из нижней точки. На шарик действует сила Лоренца, перпендикулярная его скорости, эта сила увеличивает угловую скорость поворота плоскости колебаний, когда шарик доходит до положения максимального отклонения, угловая скорость поворота достигает максимального значения. При движении в обратную сторону, сила Лоренца направлена также в противоположную сторону. Поэтому угловая скорость поворота будет уменьшаться до нуля (но направления поворота остается прежним!). После прохождения нижней точки процесс повторяется. Таким образом направление вращения совпадает с направлением действия силы Лоренца при движении от нижней точки к положению максимального отклонения. Для положительного заряда и указанного в условии направления тока в кольце вращение против часовой стрелки.

Один из возможных способов решения данной задачи – «честный, трудовой»

Предположим, что сделанное предположение о повороте плоскости колебаний, верно. Тогда закон движения шарика должен иметь вид

$$\begin{aligned} x &= A \sin \omega_0 t \cdot \cos \Omega t \\ y &= A \sin \omega_0 t \cdot \sin \Omega t \end{aligned} \quad (18)$$

(Ω - угловая скорость вращения плоскости колебаний):

Вычисляя производные, получим выражения для проекций скоростей:

$$\begin{aligned} V_x &= A \omega_0 \cos \omega_0 t \cdot \cos \Omega t - A \Omega \sin \omega_0 t \cdot \sin \Omega t = A \omega_0 \cos \omega_0 t \cdot \cos \Omega t - \Omega y \\ V_y &= A \omega_0 \cos \omega_0 t \cdot \sin \Omega t + A \Omega \sin \omega_0 t \cdot \cos \Omega t = A \omega_0 \cos \omega_0 t \cdot \sin \Omega t + \Omega x \end{aligned} \quad (20)$$

Еще раз вычисляем производную и получаем выражения для ускорений:

$$\begin{aligned} a_x &= -A \omega_0^2 \sin \omega_0 t \cdot \cos \Omega t - 2A \Omega \omega_0 \cos \omega_0 t \cdot \sin \Omega t - A \Omega^2 \sin \omega_0 t \cdot \cos \Omega t \\ a_y &= -A \omega_0^2 \sin \omega_0 t \cdot \sin \Omega t + 2A \Omega \omega_0 \cos \omega_0 t \cdot \cos \Omega t - A \Omega^2 \sin \omega_0 t \cdot \sin \Omega t \end{aligned} \quad (21)$$

Если из формул (20) выразить:

$$\begin{aligned} A \omega_0 \cos \omega_0 t \cdot \cos \Omega t &= V_x + \Omega y \\ A \omega_0 \cos \omega_0 t \cdot \sin \Omega t &= V_y - \Omega x \end{aligned} \quad (22)$$

И подставить в формулы для проекций ускорения, то их можно привести к виду:

$$\begin{aligned} a_x &= -\omega_0^2 x - 2\Omega V_y + \Omega^2 x \\ a_y &= -\omega_0^2 y + 2\Omega V_x + \Omega^2 y \end{aligned} \quad (23)$$

Сравнивая эти выражения с уравнениями движения заряженного шарика (17), видим, что они отличаются слагаемыми, пропорциональными Ω^2 . Если считать угловую скорость поворота малой, то ими можно пренебречь¹. В этом случае, полученные выражения полностью совпадают. Следовательно, высказанное предположение верно – действительно плоскость колебаний поворачивается под действием силы Лоренца. Из сравнения уравнений следует, что угловая скорость поворота равна половине циклотронной частоты $\omega_{ep.} = \frac{qB}{2m}$. Поэтому период одного полного оборота оказывается равным

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{qB}}. \quad (24)$$

Оценим эту величину. Индукция магнитного поля в центре кольца $B = \frac{\mu_0 I}{2 R} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10}{2 \cdot 0,15} \approx 4 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}$. Тогда время одного оборота

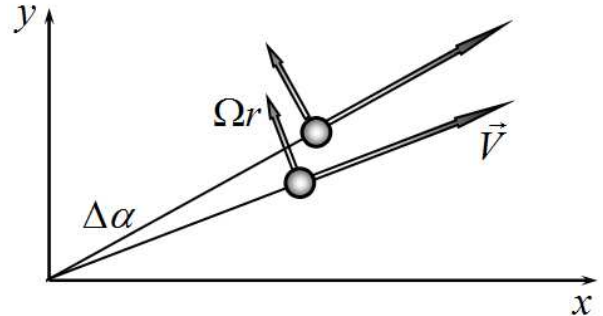
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{qB}} = 2\pi \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{1,4 \cdot 10^{-8} \cdot 4 \cdot 10^{-5}}} \approx 7,5 \cdot 10^5 \text{ с} \approx 9 \text{ суток}.$$

За такое время всякие колебания маятника затухнут!

Иной способ решения основывается на сравнении уравнений движения маятника в магнитном поле и маятника Фуко.

Часть 3. Маятник Фуко.

Физическая картина движения ясна: плоскость колебаний маятника сохраняется – поворачивается система отсчета! Поэтому закон движения (18) выполняется строго. Можно повторить длинную процедуру вычисления производных, приводящую к уравнениям (16) со всеми вытекающими последствиями. Однако для вычисления ускорений можно воспользоваться простыми геометрическими построениями. Если



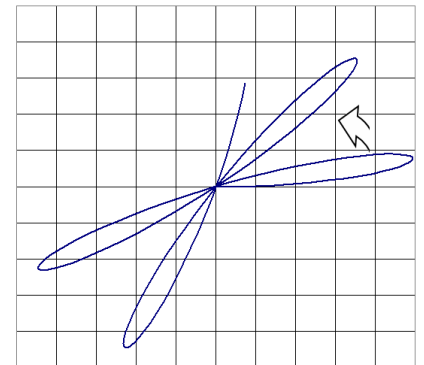
нарисовать векторы скорости в два близких момента времени (см. рис. – здесь \vec{V} - вектор скорости маятника в не вращающейся системе, Ωr - переносная скорость), то можно определить радиальную (вдоль вектора скорости) и азимутальную (перпендикулярную вектору скорости) компоненты ускорения.

Поперечное ускорение обусловлено двумя причинами:

Изменением расстояния от оси вращения: $\Delta V_n = \Omega \cdot \Delta r$;

Поворотом вектора собственной скорости $\Delta V_n = V \cdot \Delta \alpha$.

Изменение продольной составляющей обусловлено поворотом вектора переносной скорости и пропорционально Ω^2 , поэтому им можно пренебречь. Тем самым легко прийти к выражениям для ускорений. Если их выразить через скорость во вращающейся системе отсчета, то



¹ Можно и не пренебрегать, но тогда надо учесть изменение частоты собственных колебаний маятника под действием силы Лоренца.

приходим к уравнениям вида (17). Тем самым в очередной раз доказывается, что движение заряженного маятника аналогично колебаниям во вращающейся системе отсчета.

В заключение посмотрите на примерную траекторию движения шарика маятника во вращающейся системе отсчета. Здесь угловая скорость вращения в 10 раз меньше круговой частоты колебаний маятника, хотя в реальности это отношение значительно меньше!

Задача 11-3. Выпад против Эйнштейна?

Часть 1. Два шарика.

При движении с ускорением сила упругости пружинки должна обеспечивать ускорение нижнего шарика, поэтому в положении равновесия должно выполняться условие

$$F = m(g + a_0), \quad (1)$$

Следовательно, в этом положении удлинение пружинки равно

$$\Delta x = \frac{m(g + a_0)}{\gamma}. \quad (2)$$

Таким образом, смещение от положения прежнего положения равновесия оказывается равным

$$\Delta x_1 = \frac{ma_0}{\gamma}. \quad (3)$$

Эта величина является амплитудой колебаний. Поэтому закон движения шарика (с учетом начальных условий и изображенной оси координат) имеет вид

$$x(t) = -l_0 - \frac{m(g + a_0)}{\gamma} + \frac{ma_0}{\gamma} \cos \omega t. \quad (4)$$

Где $\omega = \sqrt{\frac{\gamma}{m}}$ - циклическая частота колебаний пружинного маятника.

Максимальное удлинение пружинки будет равно (через половину периода колебаний):

$$\Delta x = \frac{m(g + 2a_0)}{\gamma} \quad (5)$$

Относительное удлинение после прекращения колебаний:

$$\varepsilon_x = \frac{m(g + a_0)}{\gamma l_0} \quad (6)$$

может быть мало при большой жесткости пружинки.

Относительное изменение силы упругости

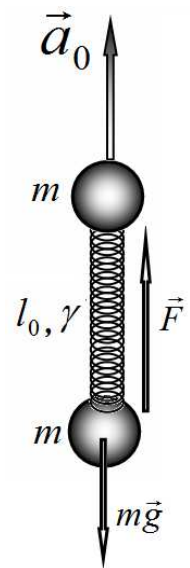
$$\varepsilon_F = \frac{\Delta F}{mg} = \frac{a_0}{g} \quad (7)$$

Не зависит от параметров груза и пружины.

Часть 2. Цепочка.

Рассмотрим пружинку, на которой висит k шариков снизу. Ее удлинение можно найти из условия равновесия

$$\Delta x_k = k \frac{mg}{\gamma}. \quad (8)$$



Так как цепочка содержит N пружинок, то суммарное удлинение находится как сумма арифметической прогрессии

$$\Delta L = \sum_{k=1}^N k \frac{mg}{\gamma} = \frac{mg}{\gamma} \frac{N(N+1)}{2}. \quad (9)$$

Относительное удлинение цепочки

$$\varepsilon_L = \left(\frac{mg}{\gamma} \frac{N(N+1)}{2} \right) / \frac{Nl_0}{2\gamma_0} = \frac{mg(N+1)}{2\gamma_0}. \quad (10)$$

При большом числе шариков эта величина может быть выражена как

$$\varepsilon_L = \frac{mg(N+1)}{2\gamma_0} \approx \frac{mgL_0}{2\gamma_0^2}. \quad (11)$$

Т.е. относительное удлинение пропорционально начальной длине.

При движении у ускорением можно получить аналогичные формулы, заменяя g на $(g + a_0)$. Поэтому

$$\varepsilon_L = \frac{m(g + a_0)(N+1)}{2\gamma_0} \approx \frac{m(g + a_0)L_0}{2\gamma_0^2}. \quad (12)$$

Относительные изменения сил натяжения всех пружинок будут одинаковыми и равными

$$\frac{\Delta F_k}{F_{k0}} = \frac{a_0}{g}. \quad (13)$$

Часть 3 Сжатие воды.

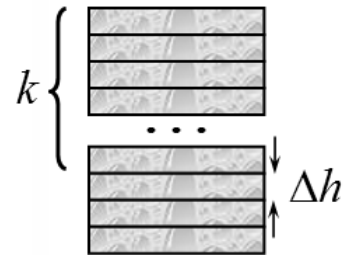
Разобьем слой недеформированной воды на тонкие слои толщиной Δh . Их общее число равно $N = \frac{h}{\Delta h}$. Рассмотрим

слой, над которым находится k слоев. Его сжатие будет равно $\delta x_k = \beta \Delta h P_k = \beta \Delta h \cdot k \rho g \Delta h$

Суммируя сжатия всех слоев (с учетом того, что их очень много), получим

$$\begin{aligned} \Delta h &= \sum_{k=1}^N \delta x_k = \beta \rho g (\Delta h)^2 \sum_{k=1}^N k = \beta \rho g (\Delta h)^2 \frac{N(N+1)}{2} \approx \\ &\approx \frac{\beta \rho g (N \Delta h)^2}{2} = \frac{\beta \rho g h^2}{2} = \frac{0,44 \cdot 10^{-9} \cdot 1,0 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \cdot (10^4)^2}{2} \approx 2,2 \cdot 10^2 \text{ м} \end{aligned} \quad (14)$$

Из-за малой сжимаемости $\Delta h \ll h$, поэтому не принципиально какую глубину подставлять в эту формулу: сжатой, или недеформированной.



Часть 4. Смещение поплавок.

Понижение уровня воды можно рассчитать с помощью формулы (14) и также, используя замену $g \rightarrow g + a_0 = 2g$:

$$\Delta h = \frac{2\beta \rho g h^2}{2} - \frac{\beta \rho g h^2}{2} = \frac{\beta \rho g h^2}{2} = \frac{0,44 \cdot 10^{-9} \cdot 1,0 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \cdot 1^2}{2} \approx 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ м} \quad (15)$$

Эта величина крайне мала, поэтому относительное изменение (увеличения) плотности равно относительному изменению (уменьшению) объема

$$\varepsilon_\rho = \frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta h}{h} \approx 2,2 \cdot 10^{-6} = 2,2 \cdot 10^{-4} \% \quad (16)$$

Что также составляет крайне малую величину, по сравнению с изменением силы давления на дно, которая увеличится в 2 раза.

Изменение глубины погружения связано изменением плотности воды:

В покоящемся лифте (l_1 - глубина погружения, S - площадь поперечного сечения пробирки) справедливо уравнение

$$mg = \rho g l_1 S. \quad (17)$$

В ускоренно движущемся лифте -

$$2mg = 2\rho(1 + \varepsilon_\rho)g(l_1 + \delta l_1)S \quad (18)$$

Из этих уравнений следует, что пробирка поднимется на величину

$$\delta l_1 = \varepsilon_\rho l_1 = \varepsilon_\rho \eta l = 2,2 \cdot 10^{-6} \cdot 0,80 \cdot 0,50 \approx 8,8 \cdot 10^{-7} \text{ м} \quad (19)$$

Далее будем рассматривать все процессы в системе отсчета, связанной с лифтом. В рамках описанной модели распространения области сжатия (или области повышенного давления), процесс сжатия воды будет происходить, пока волна сжатия не достигнет поверхности воды. В течение этого промежутка времени $t = \frac{h}{c}$ дно движется с ускорением g , а верхняя поверхность еще покоится, поэтому

$$\Delta h = \frac{\beta \rho g h^2}{2} = \frac{g t^2}{2} = \frac{g}{2} \left(\frac{h}{c} \right)^2. \quad (20)$$

Откуда следует правильная формула для скорости упругих волн:

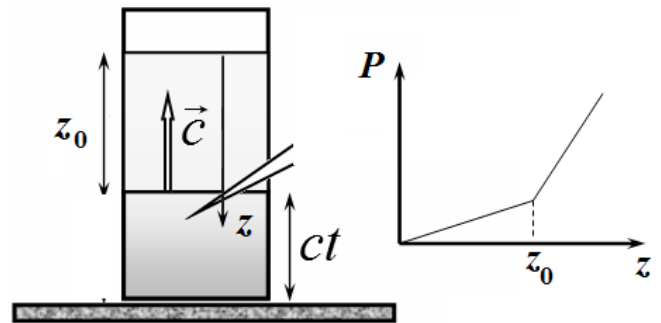
$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho \beta}} = 1,5 \cdot 10^3 \frac{\text{м}}{\text{с}} \quad (21)$$

Пусть в некоторый момент времени область повышенного давления достигла глубины z_0 . Тогда ниже этой области изменение гидростатического давления определяется по формуле

$$\Delta P = \rho(g + a_0)\Delta z = 2\rho g \Delta z \quad (16)$$

А выше его (где вода «еще не почувствовала» ускорения) изменение давления остается прежним

$$\Delta P = \rho g \Delta z \quad (17)$$



Поэтому распределение давления по глубине будет иметь вид, показанный на рисунке. Пусть волна сжатия достигла нижнего края пробирки. В этот момент пробирка начнет «чувствовать» действие повышения давления. Далее давление на дно пробирки будет возрастать по закону в течение промежутка времени $\tau = \frac{\eta l}{c}$

$$p = 2\rho g c t + \rho g(\eta l - c t) = \rho g \eta l + \rho g c t \quad (22)$$

суммарная сила, действующая на пробирку, будет равна (с учетом силы тяжести $mg = \rho g \eta l S$):

$$F = -mg + (\rho g \eta l + \rho g c t)S = mg \frac{c t}{\eta l} \quad (23)$$

Считая этот промежуток малым, найдем импульс, который получит пробирка. Так как сила изменяется со временем по линейному закону, то для подсчета импульса силы можно взять ее среднее значение за время действия силы - пока волна не достигла поверхности воды. Поэтому на основании 2 закона Ньютона в импульсной форме можно записать (в системе отсчета, связанной с Землей)

$$mv = \frac{1}{2}mg \frac{c\tau}{\eta l} \cdot \tau \Rightarrow v = \frac{\eta gl}{2c} = \frac{0,80 \cdot 9,8 \cdot 0,50}{2 \cdot 1,5 \cdot 10^3} \approx 1,3 \cdot 10^{-3} \frac{m}{c}. \quad (24)$$

Так как в этот момент поверхность воды еще покоится, то это и будет максимальная скорость пробирки относительно поверхности воды.

Выводы делайте самостоятельно!