

## Решения задач.



### Задание 9.1. Действует ли сила Архимеда на воду?

При погружении тела в воду на него действует сила Архимеда, такая же по модулю, но противоположная по направлению сила действует на воду.

Поэтому изменение веса стакана при погружении стержня равно

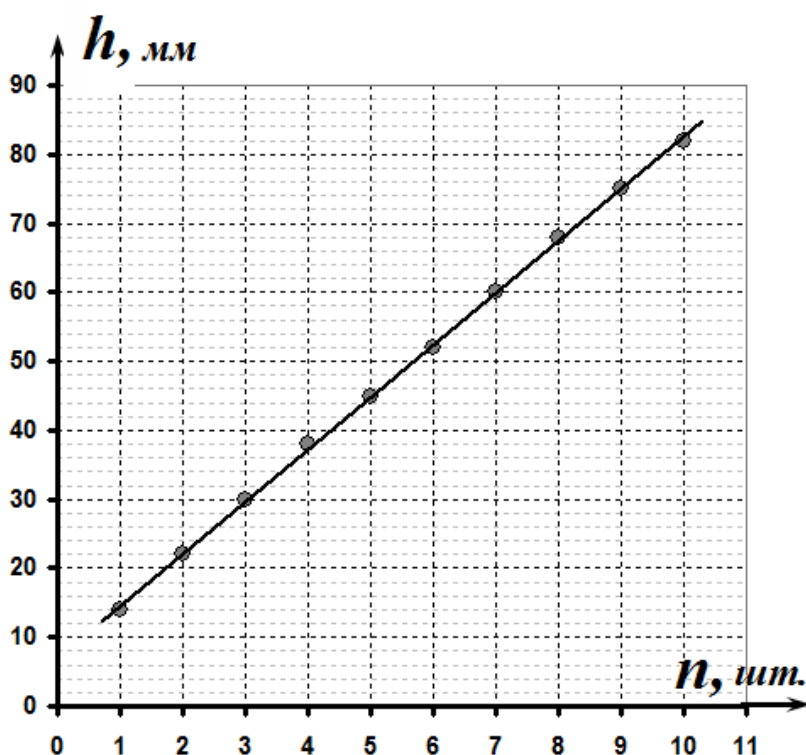
$$\Delta P = F_{\text{Арх.}} = \rho_0 \frac{\pi d^2}{4} hg \quad (1)$$

Часть 2.

Результаты измерений зависимости глубины погружения гвоздя от числа кусочков проволоки приведены в таблице. Рядом представлен график полученной зависимости.

Таблица результатов измерений.

$n$	$h, \text{мм}$
1	14
2	22
3	30
4	38
5	45
6	52
7	60
8	68
9	75
10	82



Как следует из графика зависимость почти строго линейная. То, что она не проходит через нуль, частично связано с наличием у гвоздя острия.

Изменение веса грузов, связанное с добавлением числа кусочков проволоки равно

$$\Delta P = \rho_1 \frac{\pi d_1^2}{4} g l_0 n. \quad (2)$$

$d_1, l_0$  диаметр и длина одного кусочка проволоки.

Если приравнять эту величину к изменению веса стаканчика, то получим теоретический вид полученной экспериментальной зависимости

$$\rho_1 \frac{\pi d_1^2}{4} g l_0 n = \rho_0 \frac{\pi d^2}{4} hg \Rightarrow h = \frac{\rho_1 d_1^2}{\rho_0 d^2} l_0 n. \quad (3)$$

Из этой формулы следует, что плотность материала проволоки (а не гвоздя) выражается через коэффициент наклона графика

$$\rho_1 = \rho_0 \frac{d^2}{d_1^2} \frac{\Delta h}{\Delta n} \frac{1}{l_0} \quad (4)$$

Коэффициент наклона графика равен  $\frac{\Delta h}{\Delta n} = 7,55 \text{ мм}$ , диаметры проволоки и гвоздя равны  $d_1 = 4,0 \text{ мм}$ ,  $d = 0,8 \text{ мм}$ ,  $l_0 = 23 \text{ мм}$ . Следовательно, плотность материала проволоки равна

$$\rho_1 = 1,0 \cdot 10^3 \left( \frac{4,0}{0,8} \right)^2 \frac{7,55}{23} = 8,2 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}. \quad (5)$$

Оценка погрешности дает  $\Delta \rho_1 = 0,9 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ , что составляет величину порядка 10%.

Основной вклад в погрешность дает ошибка измерения диаметра проволоки.

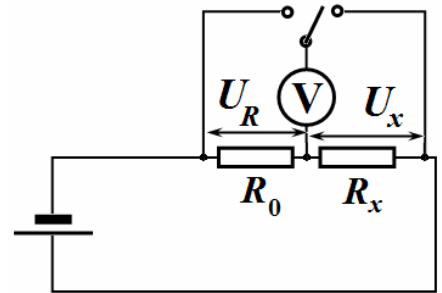
## Задание 9.2. Что такое длина и ширина?

1.1 Так как при последовательном соединении проводников сила тока одинакова через каждый из них, то справедливо соотношение

$$\frac{U_R}{R_0} = \frac{U_x}{R_x},$$

из которой следует расчетная формула для измеряемого сопротивления

$$R_x = R_0 \frac{U_x}{U_R} \quad (1)$$



Таким образом, для измерения неизвестного сопротивления необходимо измерить напряжения на измеряемом и известном резисторах.

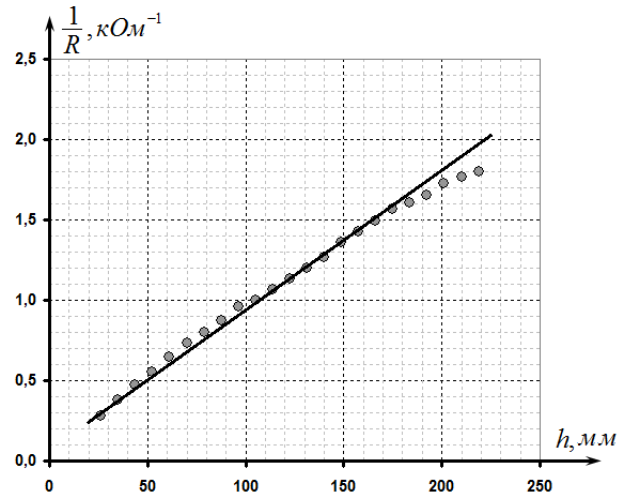
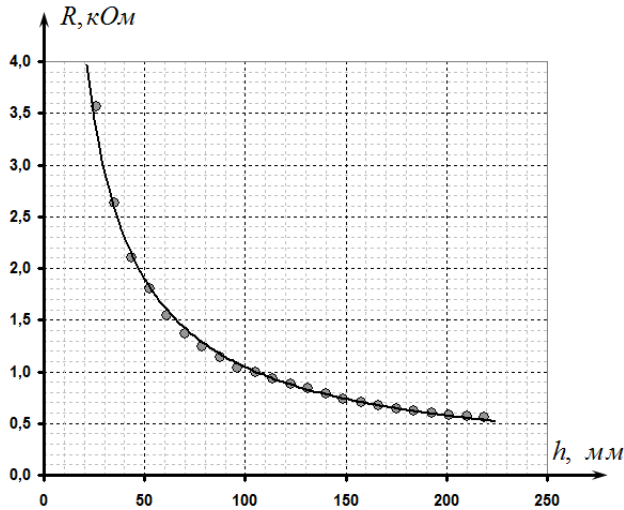
*Если бы напряжение источника было стабилизировано, то достаточно было измерить напряжение на одном из них.*

### Часть 2.

Результаты измерений напряжений в зависимости от высоты уровня налитой воды представлены в Таблице 1. В ней же приведены результаты расчета сопротивления воды между электродами. Удобно проводить измерения по шкале мензурки, которая задана в миллилитрах. Простым измерением легко установить, что объему  $V_0 = 200 \text{ мл}$  соответствует высота  $h_0 = 175 \text{ мм}$ . Поэтому высота уровня налитой жидкости рассчитывается по формуле  $h = V \frac{h_0}{V_0}$ .

**Таблица 1. Зависимость от высоты столба воды.**

$V, \text{мл}$	$U_r, \text{В}$	$U_x, \text{В}$	$R_x, \text{кОм}$	$1/R_x, \text{кОм}^{-1}$	$h \text{ см}$
30	1,64	2,92	3,56	0,28	26,25
40	1,95	2,57	2,64	0,38	35,00
50	2,22	2,33	2,10	0,48	43,75
60	2,38	2,15	1,81	0,55	52,50
70	2,57	1,99	1,55	0,65	61,25
80	2,69	1,84	1,37	0,73	70,00
90	2,81	1,75	1,25	0,80	78,75
100	2,89	1,65	1,14	0,88	87,50
110	3,00	1,56	1,04	0,96	96,25
120	3,05	1,52	1,00	1,00	105,00
130	3,10	1,45	0,94	1,07	113,75
140	3,15	1,39	0,88	1,13	122,50
150	3,21	1,34	0,83	1,20	131,25
160	3,25	1,28	0,79	1,27	140,00
170	3,32	1,22	0,73	1,36	148,75
180	3,36	1,18	0,70	1,42	157,50
190	3,41	1,14	0,67	1,50	166,25
200	3,45	1,10	0,64	1,57	175,00
210	3,47	1,08	0,62	1,61	183,75
220	3,47	1,05	0,61	1,65	192,50
230	3,52	1,02	0,58	1,73	201,25
240	3,54	1,00	0,56	1,77	210,00
250	3,56	0,99	0,56	1,80	218,75



На рисунке показан график полученной зависимости. Кривая очень похожа на гиперболу, намекающую на обратно пропорциональную зависимость.

Схематическое распределение токов в этом случае показано на следующем рисунке. Ток протекает между боковыми поверхностями спиц, поэтому высота уровня жидкости определяет площадь некоторого эффективного поперечного сечения. Поэтому разумно предположить, что измеренное сопротивление обратно пропорционально высоте уровня жидкости

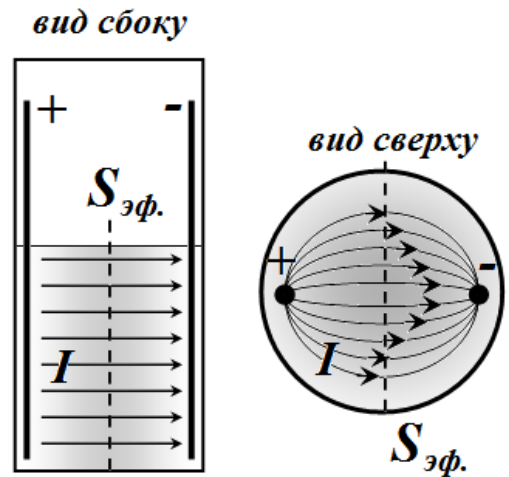
$$R_x = \frac{A}{h}. \quad (2)$$

где  $A$  - некоторая постоянная величина. Для проверки этого предположения можно построить график зависимости проводимости от высоты уровня жидкости

$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{A} h. \quad (3)$$

Построенный график подтверждает сделанное предположение – так как он очень близок к линейному. Только при больших  $h$  наблюдаются отклонения от пропорциональной зависимости. Коэффициент наклона этого графика примерно равен  $0,009 \text{ кОм}^{-1} \text{ мм}^{-1}$ . Следовательно, параметр  $A$  в формуле (2) примерно равен

$$A = 11 \text{ кОм} \cdot \text{мм}. \quad (4)$$

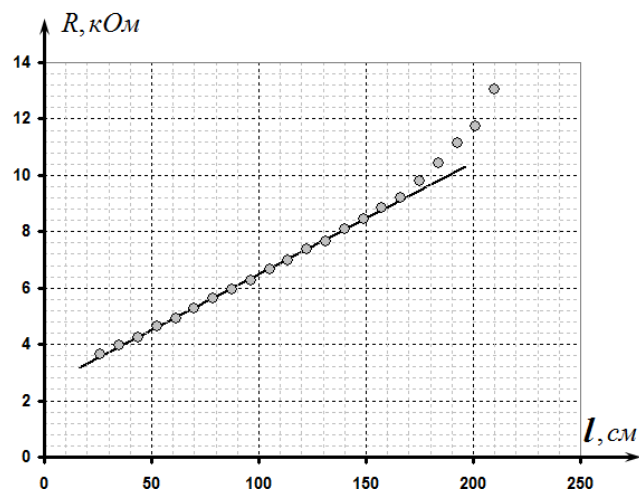


### Часть 3.

Результаты измерений и расчетов сопротивлений представлены в Таблице 2. Рядом показан график полученной зависимости.

Таблица 2.

$V, \text{мл}$	$U_r, \text{В}$	$U_x, \text{В}$	$R_x, \text{кОм}$	$h \text{ см}$
30	1,61	2,94	3,65	26,25
40	1,53	3,02	3,95	35,00
50	1,45	3,09	4,26	43,75
60	1,37	3,17	4,63	52,50
70	1,31	3,23	4,93	61,25
80	1,25	3,29	5,26	70,00
90	1,19	3,35	5,63	78,75
100	1,14	3,4	5,96	87,50
110	1,1	3,44	6,25	96,25
120	1,05	3,49	6,65	105,00
130	1,01	3,52	6,97	113,75
140	0,97	3,57	7,36	122,50
150	0,94	3,6	7,66	131,25
160	0,9	3,64	8,09	140,00
170	0,87	3,67	8,44	148,75
180	0,84	3,71	8,83	157,50
190	0,81	3,73	9,21	166,25
200	0,77	3,77	9,79	175,00
210	0,73	3,81	10,44	183,75
220	0,69	3,84	11,13	192,50
230	0,66	3,88	11,76	201,25
240	0,6	3,92	13,07	210,00



Полученная зависимость близка к линейной.

Примерное распределение токов в этом случае показано на следующем рисунке. В этом случае расстояние между спицами играет роль некоторой эффективной длины проводника, поэтому сопротивление воды между спицами в этом случае оказывается примерно линейно зависящим от  $l$ , что и подтверждается экспериментальными данными. Небольшое дополнительное сопротивление может быть связано с ограничением токов вблизи острия спиц.

Функционально данная зависимость описывается формулой

$$R_x = al + b \quad (5)$$

Параметры этой формулы можно найти с помощью построенного графика

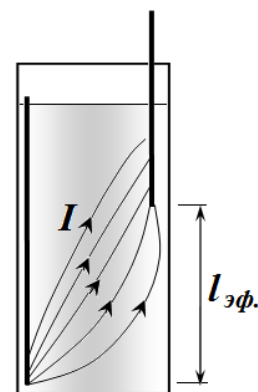
$$a \approx 0,04 \frac{\text{кОм}}{\text{мм}}, \quad b \approx 2,5 \text{ кОм}. \quad (6)$$

Полученное значение коэффициента наклона графика представляет собой сопротивление одного миллиметра столба воды, что дает возможность оценить ее удельное электрическое сопротивление

$$a = \frac{\Delta R}{\Delta l} = \frac{\rho}{S} \Rightarrow \rho = aS = a \frac{V_0}{h_0}. \quad (7)$$

Подстановка численных значений дает

$$\rho = a \frac{V_0}{h_0} = 0,04 \frac{10^3 \text{ Ом}}{10^{-3} \text{ м}} \cdot \frac{200 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3}{175 \cdot 10^{-3} \text{ м}} \approx 45 \text{ Ом} \cdot \text{м} \quad (8)$$



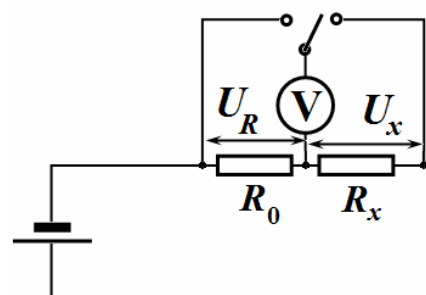
## Задание 10.1. Диффузия соли.

1.1 Так как при последовательном соединении проводников сила тока одинакова через каждый из них, то справедливо соотношение

$$\frac{U_R}{R_0} = \frac{U_x}{R_x},$$

из которой следует расчетная формула для измеряемого сопротивления

$$R_x = R_0 \frac{U_x}{U_R} \quad (1)$$



Таким образом, для измерения неизвестного сопротивления необходимо измерить напряжения на измеряемом и известном резисторах.

При временных измерениях можно измерять только напряжение  $U_x$ , а напряжение на резисторе рассчитывать по формуле  $U_R = U_0 - U_x$ , где  $U_0$  - напряжение источника<sup>1</sup>, тогда формула (1) преобразуется к

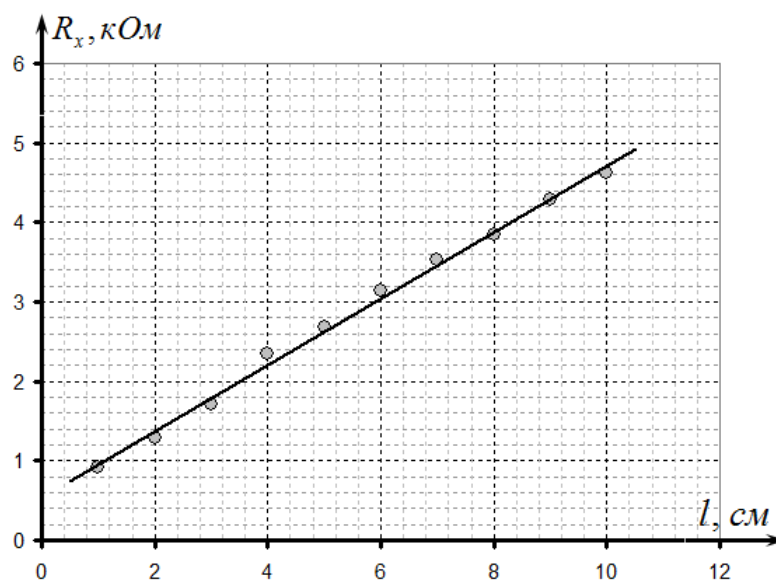
$$R_x = R_0 \frac{U_x}{U_0 - U_R} \quad (2)$$

### Часть 1. Сопротивление мокрого картона.

Результаты измерения сопротивления полоски в зависимости от расстояния между контактами приведены в Таблице 1. Там же представлены результаты расчета сопротивлений. Справа показан график полученной зависимости.

Таблица 1.

$l, \text{см}$	$U_x, \text{В}$	$R_x, \text{кОм}$
1	1,42	0,92
2	1,76	1,28
3	2,08	1,72
4	2,43	2,35
5	2,58	2,69
6	2,75	3,14
7	2,87	3,52
8	2,96	3,84
9	3,07	4,29
10	3,14	4,62



Расчет по МНК для линейной зависимости  $R_x = al + b$  дал следующие значения параметров этой зависимости

$$a = (0,42 \pm 0,02) \frac{\text{кОм}}{\text{см}}, \quad b = (0,54 \pm 0,12) \text{кОм}$$

<sup>1</sup> В своих измерениях мы использовали стабилизированный источник, поэтому данные приведены только для напряжения  $U_x$ , расчеты проведены по формуле (2).

Заметное постоянное сопротивление  $b$  скорее всего, связано с сопротивлением подводящих контактов.

Параметр  $a$  дает искомое сопротивление 1 сантиметра мокрого картона.

Измеренное сопротивление добротной посоленной картонной полоски оказалось равным  $R_1 = 0,011 \frac{\text{кОм}}{\text{см}}$ , что значительно (в 50 раз!) меньше сопротивления полоски без соли.

## Часть 2.

Так как сопротивление «соленой» полоски значительно меньше несоленой, то можно считать, что та часть картона до которой в следствии диффузии дошла соль имеет нулевое сопротивление. Иными словами сопротивление определяется только оставшейся несоленой частью. Далее, в 1 части было показано, что сопротивление полоски пропорционально ее длине. Поэтому будет выполняться соотношение

$$\frac{R_0 - R}{R_0} = \frac{l_0 - l}{l_0} = \frac{x_c}{l_0} = \eta \quad (3)$$

где  $x$  - длина участка полоски, до которой дошла соль,  $\eta$  - отношение длины просолившейся части к длине полоски (или размер просолившейся части в относительных единицах). Тем самым по измерению зависимости сопротивления от времени можно изучать диффузионное движение соли.

В таблице 2 приведены результаты измерений зависимости сопротивления от времени и результаты расчетов величины  $\eta$  (начальное сопротивление равнялось 0,66 кОм). Рядом показан график полученной зависимости.

**Таблица 2.**

$t, \text{мин}$	$U_x, \text{В}$	$R_x, \text{кОм}$	$\eta$
1	711	0,38	0,43
2	687	0,36	0,46
3	675	0,35	0,47
4	665	0,35	0,48
5	658	0,34	0,48
6	651	0,34	0,49
7	648	0,34	0,49
8	643	0,33	0,50
9	636	0,33	0,50
10	630	0,33	0,51
11	627	0,32	0,51
12	623	0,32	0,52
13	617	0,32	0,52
14	613	0,32	0,52
15	607	0,31	0,53
16	601	0,31	0,53
17	593	0,30	0,54
18	584	0,30	0,55
19	581	0,30	0,55
20	573	0,29	0,56
21	567	0,29	0,56
22	563	0,29	0,57
23	558	0,28	0,57

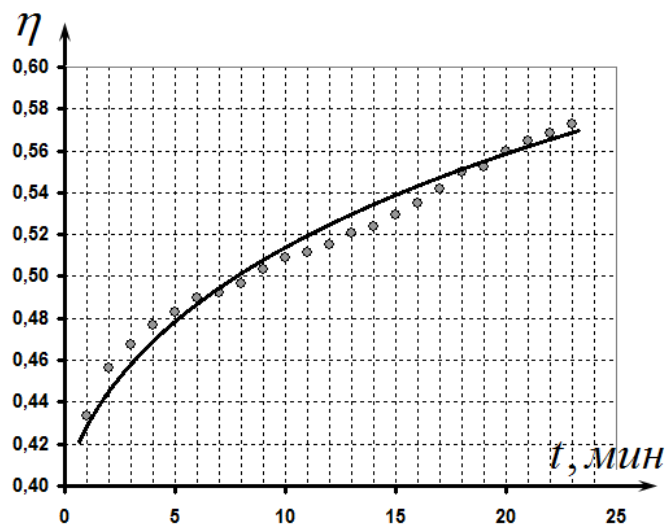


График похож на корневую зависимость. Для проверки этого предположения можно построить зависимость смещения от  $\sqrt{t}$ . Этот график показан справа. Видно, что полученная зависимость действительно близка к прямо пропорциональной, что подтверждает приведенный в условии закон диффузии.

Согласно этому закону ширина просолившейся полоски (с учетом того, что диффузия идет в обе стороны) равна

$$x = \sqrt{4Dt}$$

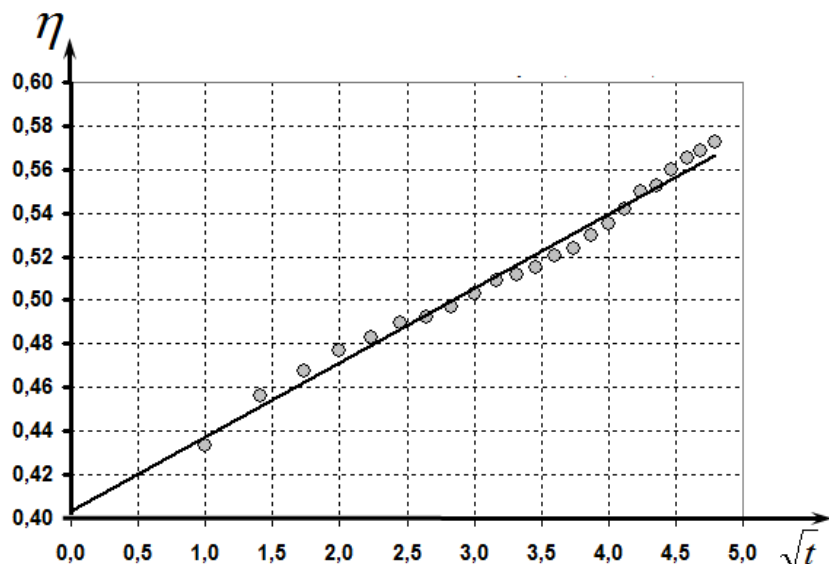
Следовательно, коэффициент наклона приведенного графика определяется формулой

$$a = \frac{\Delta\eta}{\Delta(\sqrt{t})} = \frac{2}{l_0} \sqrt{D} \quad (3)$$

Из которой следует, что коэффициент диффузии может быть оценен, как  $D = \frac{a^2 l_0^2}{4}$ .

Найденной значение коэффициента наклона  $a = 0,034$  (время в минутах) дает следующее значение коэффициента диффузии

$$D = \frac{0,034^2 \text{ мин}^{-1} \cdot 5^2 \text{ см}^2}{4} = \frac{0,034^2 \frac{1}{60} \text{ с}^{-1} \cdot 5^2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2}{4} = 1,2 \cdot 10^{-8} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$$





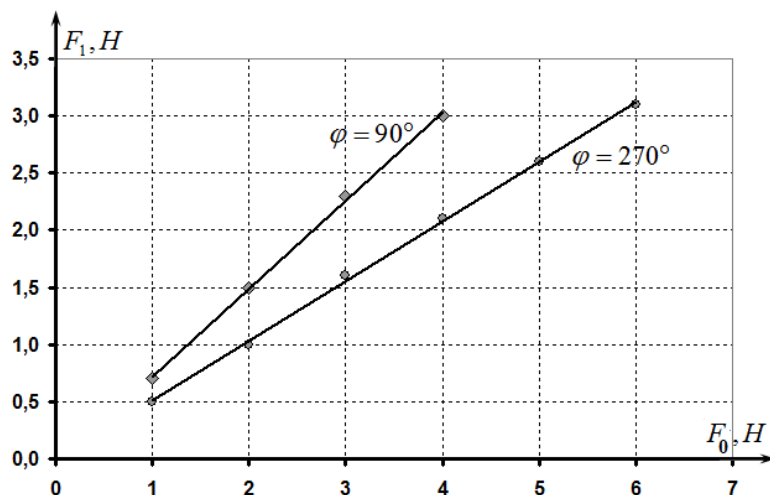
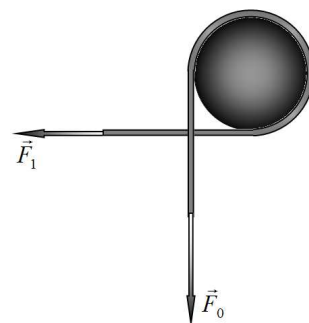
## Задание 10.2. Формула Эйлера.

### Часть 1. Зависимость от массы.

В таблице 1 приведены результаты измерений зависимостей показаний динамометра  $F_1$  от числа подвешенных грузов (или от их силы тяжести  $F_0$ ) при двух значениях угла закрутки  $\varphi_1 = 90^\circ$  и  $\varphi_2 = 270^\circ$ . Для измерений при угле  $\varphi_2 = 270^\circ$  достаточно намотать нить на кнопку, как показано на рисунке.

Таблица 1.

Число грузов $F_0, \text{ Н}$	Показания динамометра $F_1, \text{ Н}$	
	$\varphi = 90^\circ$	$\varphi = 270^\circ$
1	0,7	0,5
2	1,5	1
3	2,3	1,6
4	3	2,1
5		2,6
6		3,1



На следующем рисунке приведены графики полученных зависимостей. Как следует из графиков (прямые линии, примерно проходящие через нуль, т.е. прямо пропорциональные зависимости), действительно, сила трения уменьшает натяжение в одно и тоже число раз, то есть

$$F_1 = kF_0 \quad (1)$$

Из формулы Эйлера следует, что

$$k = \exp(-\mu\varphi). \quad (2)$$

Параметры линейных зависимостей ( $y = ax + b$ ) для двух прямых, рассчитанные по МНК, равны:

для  $\varphi_1 = 90^\circ$

$$a = 0,77 \pm 0,04 \quad (3)$$

$$b = -0,05 \pm 0,09$$

для  $\varphi_2 = 270^\circ$

$$a = 0,52 \pm 0,03 \quad (4)$$

$$b = -0,01 \pm 0,06$$

Расчет сдвига (параметр  $b$ ) показывает, что его можно считать равным нулю, то есть зависимости являются прямо пропорциональными. Коэффициенты наклона позволяют рассчитать значения коэффициентов трения по формулам

$$\mu = -\frac{\ln a}{\varphi}, \quad \Delta\mu = \frac{1}{\varphi} \frac{\Delta a}{a}. \quad (5)$$

Расчет по этим формулам дает следующие значения коэффициентов трения для  $\varphi_1 = 90^\circ$

$$\mu = 0,17 \pm 0,03 \quad (6)$$

для  $\varphi_2 = 270^\circ$

$$\mu = 0,14 \pm 0,02 \quad (7)$$

В пределах погрешности данные значения коэффициента трения примерно равны.

## Часть 2. Зависимость от угла.

Таблица 2. Для трех грузов.

$\varphi^\circ$	$\varphi, \text{рад}$	$F, \text{Н}$	$\ln F$
90	1,57	2,2	0,788
135	2,36	2,0	0,693
180	3,14	1,9	0,642
225	3,93	1,8	0,560
270	4,71	1,5	0,405
315	5,50	1,3	0,262
45	0,79	2,5	0,916

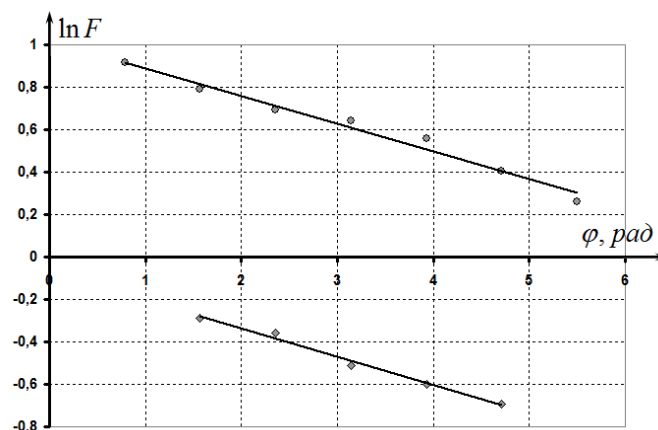


Таблица 3. Для двух грузов.

$\varphi^\circ$	$\varphi, \text{рад}$	$F, \text{Н}$	$\ln F$
90	1,57	1,5	-0,288
135	2,36	1,4	-0,357
180	3,14	1,2	-0,511
225	3,93	1,1	-0,598
270	4,71	1,0	-0,693

В таблицах 2,3 приведены результаты измерений зависимости показаний динамометров  $F$  от угла закрутки  $\varphi$ . Для доказательства применимости формулы Эйлера эти зависимости следует построить зависимость логарифма силы от угла закрутки (в радианах):

$$\ln F = \ln F_0 - \mu\varphi \quad (8)$$

Результаты расчетов также представлены в таблицах, рядом приведены графики полученных зависимостей. Эти зависимости близки к линейным, что свидетельствует о применимости формулы Эйлера. Кроме того, коэффициенты наклона этих графиков одинаковы, что говорит о том, что значения коэффициентов трения примерно равны.

Расчет коэффициентов наклона приведенных прямых (по МНК) показывает, что значение коэффициента трения в обоих случаях равно

$$\mu = 0,13 \pm 0,02 \quad (9)$$

## Часть 3.

В качестве конечного значения коэффициента трения можно взять значение (9), полученное с большей точностью и по наибольшему числу экспериментальных данных..

## Задача 11.1

### Часть Теоретическая.

На рисунке изображены силы, действующие на весы с подвешенным грузом. Силу тяжести самих весов можно приложить к их центру тяжести. Условия равновесия весов имеют вид

$$Fl \cos(\alpha_0 + \varphi) = Ma \sin \varphi = \mu \sin \varphi \quad (1)$$

Используя формулу для косинуса суммы,

$$Fl(\cos \alpha_0 \cos \varphi - \sin \alpha_0 \sin \varphi) = \mu \sin \varphi$$

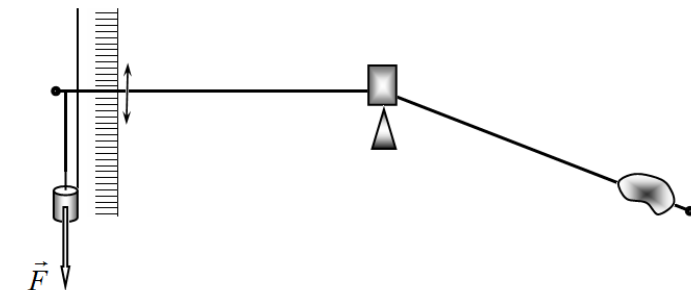
$$Fl(\cos \alpha_0 \cdot \operatorname{ctg} \varphi - \sin \alpha_0) = \mu$$

эту формулу можно преобразовать к виду

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{Fl \cos \alpha_0 - \mu}{Fl \cos \alpha_0} = \operatorname{tg} \alpha_0 + \frac{\mu}{Fl \cos \alpha_0} \quad (2)$$

Эта формула допускает простую экспериментальную проверку. Необходимо измерить зависимость угла отклонения весов от числа подвешенных скрепок  $N$ . Тогда зависимость угла отклонения от  $N^{-1}$  должна быть линейна. Причем коэффициент наклона ее должен возрасти при уменьшении угла между спицами (т.к. при увеличении этого угла опускается центр масс спиц).

Самый простой вид формула (2) приобретает при  $\alpha_0 = 0$ , т.е. когда спица, на которую действует измеряемая сила, в положении равновесия расположена горизонтально. В этом случае связь между силой и углом отклонения имеет вид:



$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{l}{\mu} F \quad (3)$$

Наиболее простой способ измерения угла отклонения – по смещению спицы, измеренному по линейке, которая расположена перпендикулярно спице в положении равновесия. Тогда

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta x}{l_0}. \quad (4)$$

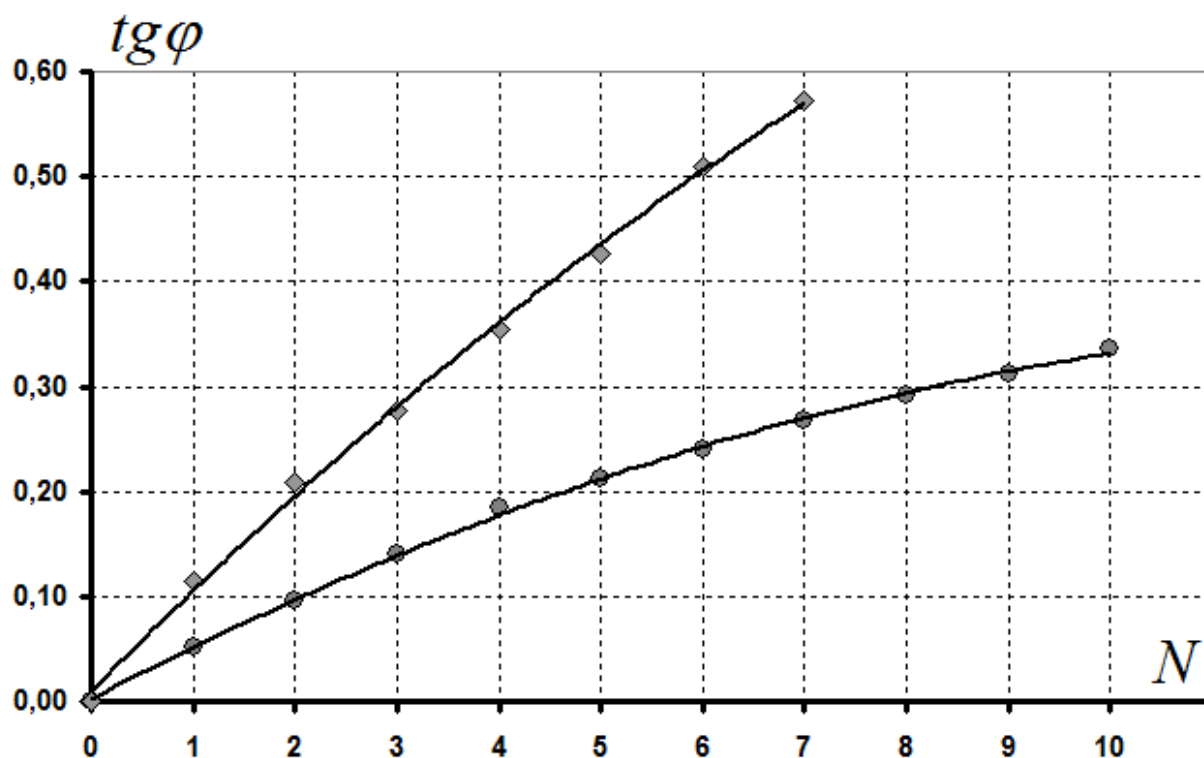
## Часть 1. Градуировка и чувствительность.

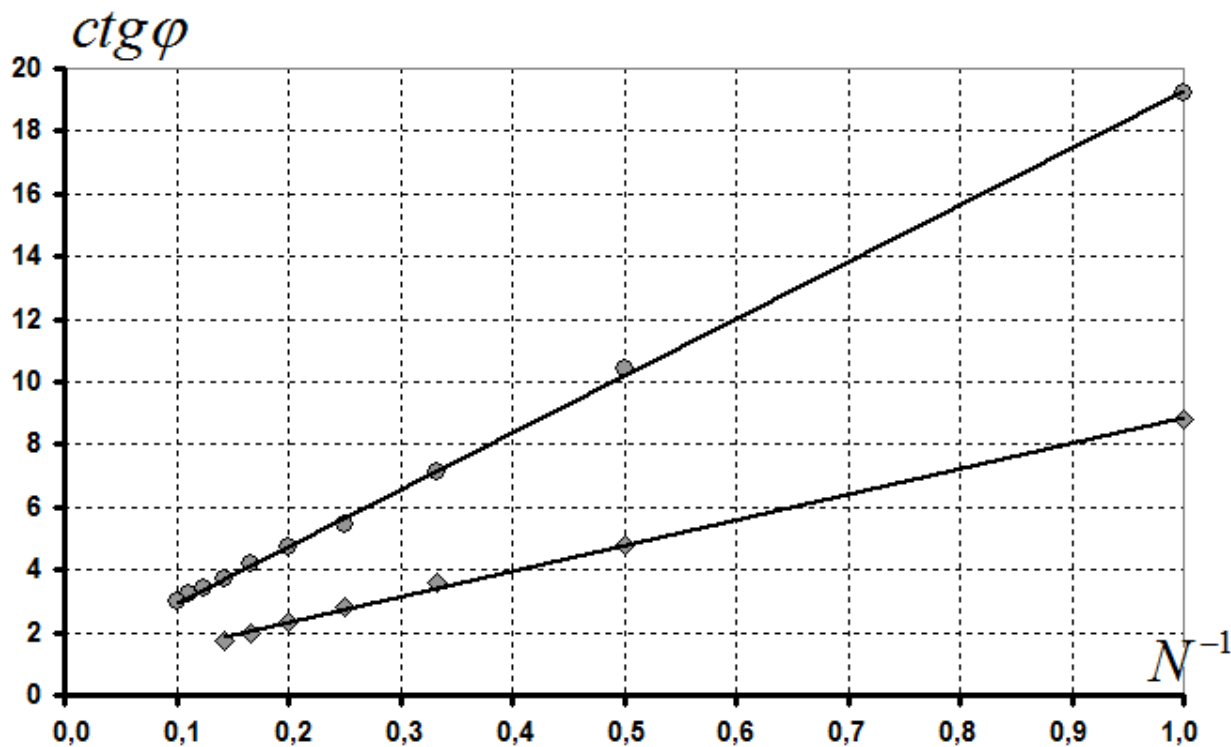
В таблице приведены результаты измерений отклонения от числа подвешенных скрепок для двух примерно симметричных весов – с углом близким к прямому и углом близки к развернутому. Там же приведены расчетные данные, необходимые для проверки соотношения (2).

$N$	$N^{-1}$	«прямой» угол			«развернутый» угол		
		$\Delta x$ , см	$tg\varphi$	$ctg\varphi$	$\Delta x$ , см	$tg\varphi$	$ctg\varphi$
0		0,0	0,000		0,0	0,000	
1	1,000	1,3	0,052	19,231	2,5	0,114	8,800
2	0,500	2,4	0,096	10,417	4,6	0,209	4,783
3	0,333	3,5	0,140	7,143	6,1	0,277	3,607
4	0,250	4,6	0,184	5,435	7,8	0,355	2,821
5	0,200	5,3	0,212	4,717	9,4	0,427	2,340
6	0,167	6,0	0,240	4,167	11,2	0,509	1,964
7	0,143	6,7	0,268	3,731	12,6	0,573	1,746
8	0,125	7,3	0,292	3,425			
9	0,111	7,8	0,312	3,205			
10	0,100	8,4	0,336	2,976			

На рисунках показаны полученные зависимости. Графики однозначно свидетельствуют о выполнимости соотношения (2):

- обратная зависимость линейна;
- коэффициенты наклона для разных углов между спицами соответствуют приведенным соотношениям.





Естественно, чувствительность весов возрастает при увеличении угла между спицами, но при этом уменьшается диапазон измерения.

### Часть 2. Закон Архимеда.

Для проверки закона Архимеда и измерения массы скрепки удобнее использовать оптимальную схему с горизонтальным плечом. К одному из плеч подвешивается гвоздь, ко второму такой кусок пластилина, чтобы уравновесить гвоздь и расположить первое плечо горизонтально.

Далее необходимо провести две серии измерений зависимости угла отклонения от числа подвешенных скрепок: первая без воды, вторая с погружением в воду. Обе зависимости оказываются линейными (коэффициенты наклона которых зависят угла между спицами, точек подвеса и т.д.)

По изменению коэффициента наклона можно определить массу одной скрепки, которая оказывается равной примерно 0,3 г.

**Части 3 и 4** Выполняются аналогично. Результаты сильно зависят от конструкции, кроме того, возможны различные варианты установок – в любом случае оценивание таких работ требует внимательного рассмотрения!