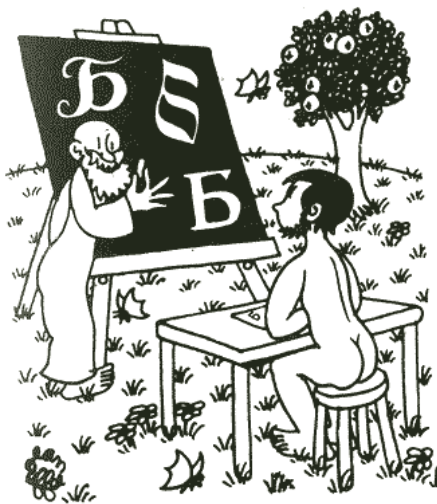




*А.И. Слободянюк
А.А. Мищук
Л.Г. Маркович*



*Республиканская
физическая
олимпиада
(III этап)
2011 год.*

Теоретический тур

Решения задач

Задача 9.1.

Смотри решение первой части задачи 11.1

Задача 9.2 Занимательное путешествие.

1. Если Федя измеряет расстояние в столбах, а время в шагах, то единицей измерения скорости является [столбов/шаг], а ускорения — [столбов/шаг²]. Движение поезда при разгоне — равноускоренное, следовательно, пройденный путь равен:

$$S = \frac{at^2}{2} \quad (1),$$

причем расстояние измеряется в столбах а время в шагах. Для более точного определения ускорения необходимо построить график зависимости S от t^2 . Для этого добавим в таблицу, составленную Федей, третью колонку в которую занесем время движения (в шагах) поезда.

Номер столба, S	Количество шагов	Время движения	t^2
1	19	19	361
2	8	27	729
3	6	33	1089
4	5	38	1444
5	4	42	1764
6	4	46	2116
7	4	50	2500
8	3	53	2809

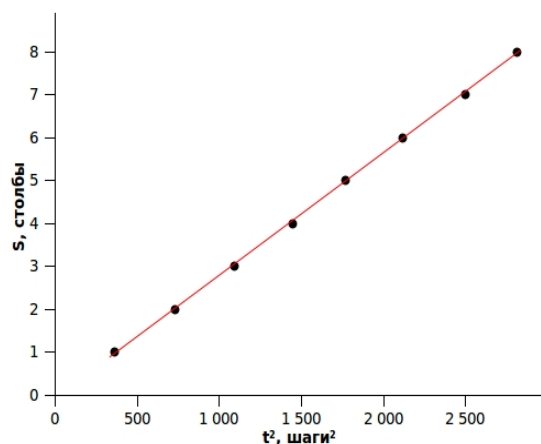


График зависимости S от t^2 представлен на рисунке.

Наклон графика равен $2,9 \cdot 10^{-3}$, ускорение при разгоне равно:

$$a_p = 5,8 \cdot 10^{-3} \frac{\text{столбов}}{\text{шаг}^2} \quad (2).$$

Поезд разогнался на расстоянии равном 45 столбам. Скорость определим по формуле:

$$v = \sqrt{2aS} = 0,72 \frac{\text{столба}}{\text{шаг}} \quad (3).$$

3. Т. к. поезд тормозит на расстоянии в 1,5 раза меньшем чем разгоняется (30 против 45), то его ускорение при торможении в 1,5 раза больше:

$$a_T = 8,7 \cdot 10^{-3} \frac{\text{столбов}}{\text{шаг}^2} \quad (4).$$

4. Время разгона равно: $t_p = \frac{v}{a_p} = 124 \text{ шага}$, время торможения $t_T = 83 \text{ шага}$, а время движения с постоянной скоростью $t_{II} = \frac{200 \text{ столбов}}{v} = 278 \text{ шагов}$. Тогда средняя скорость равна:

$$\langle v \rangle = \frac{45 + 200 + 35}{124 + 278 + 83} = 0,58 \frac{\text{столбов}}{\text{шаг}} \quad (5).$$

5. Обозначим длину шага Феи за l . Тогда за время, в течение которого Фея делает 15 шагов, поезд равноускоренно пройдет расстояние $(50+15)l$. Следовательно:

$$\frac{a_p 15^2}{2} = 65l \quad (6).$$

Подставляя значение ускорения, получим:

$$l = 0,01 \text{ столба} \quad (7).$$

6. Один столб равен 100 шагам. Поэтому:

$$a_p = 0,58 \text{ шаг}^{-1} \quad (8),$$

$$a_T = 0,87 \text{ шаг}^{-1} \quad (9),$$

$$v = 72 \quad (10),$$

$$\langle v \rangle = 58 \quad (11),$$

Формально скорость становится безразмерной величиной, а ускорение измеряется в обратных шагах. Однако на самом деле не вполне корректно сокращать шаги в числителе и в знаменателе, т. к. в знаменателе шаг является мерой расстояния, а в числителе мерой времени.

7. По результатам забега на 100-метровую дистанцию, определяем, что длина шага Феи равна 0,5 м, а промежуток времени между ними равен 1,2 с. Расстояние между столбами, очевидно, 50 м. Подставляя в (2) — (5), получим:

$$a_p = 0,2 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \quad (12),$$

$$a_T = 0,3 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \quad (13),$$

$$v = 30 \frac{\text{м}}{\text{с}} \quad (14),$$

$$\langle v \rangle = 24 \frac{\text{м}}{\text{с}} \quad (15).$$

8. Расстояние между остановками:

$$S = 280 \text{ столбов} \cdot 50 \text{ м} = 14 \text{ км} \quad (16).$$

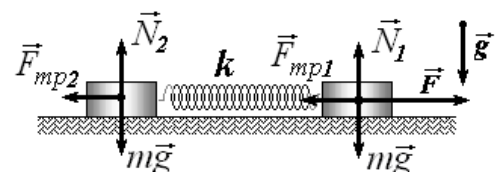
Задача 9.3. Пружинки.

1.1 Ускорение a системы, образованной двумя брусками, найдем из второго закона Ньютона

$$2ma = F - 2F_{mp} = F - 2\mu mg, \quad (1)$$

где $F_{mp} = F_{mp1} = F_{mp2}$ сила трения, действующая на каждый из брусков.

Поскольку силы упругости пружины в данном случае являются внутренними (действуют



на оба бруска), то в уравнение (1) они не вошли (на рисунке не отмечены).

Из (1) получим

$$a = \frac{F - 2\mu mg}{2m}. \quad (2)$$

Подчеркнем, что при записи (1) и (2) предполагается (и следует из условия задачи), что выполняется условие $F > 2\mu mg$.

Теперь применим второй закон Ньютона к движению левого бруска 2, который ускоряется под действием силы упругости пружины \vec{F}_y и силы трения \vec{F}_{mp2}

$$ma = F_y - F_{mp2} = F_y - \mu mg. \quad (3)$$

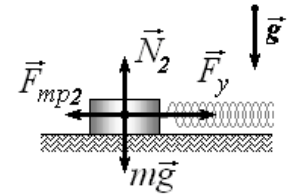
Выражая из (3) значение силы упругости F_y пружины, найдем

$$ma = m \frac{F - 2\mu mg}{2m} = F_y - \mu mg. \quad (4)$$

Из (4) следует, что $F_y = \frac{F}{2}$, следовательно, согласно закону Гука

$$F_y = \frac{F}{2} = k\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{F}{2k}. \quad (5)$$

Как следует из (5), абсолютное удлинение пружины Δx в данном случае прямо пропорционально модулю F силы, приложенной к одному из брусков. Интересно, что коэффициент трения μ брусков о плоскость не вошел в окончательный ответ.



1.2 Под действием внешней силы шары начнут ускоряться по горизонтальной плоскости (сухим трением, согласно условию, можно пренебречь). По мере роста скорости шаров будут увеличиваться модули сил сопротивления \vec{F}_{comp} , действующих на них в системе, причем, поскольку скорости шаров одинаковы, то $F_{comp1} = F_{comp2}$.

Следовательно, при некоторой скорости $v_1 = const$ сумма сил сопротивления сравняется по модулю с силой \vec{F} , после чего разгон системы прекратится (движение установится, т.е. ее ускорение станет равным нулю $a = 0$).

Запишем второй закон Ньютона для установившегося движения системы шаров

$$2ma = 0 = F - 2F_{comp} = F - 2\beta v_1. \quad (6)$$

Поскольку силы упругости пружины в данном случае являются внутренними (действуют на оба шара), то в уравнение (6) они не вошли.

Из (6) следует, что

$$F_{comp} = \frac{F}{2}.$$

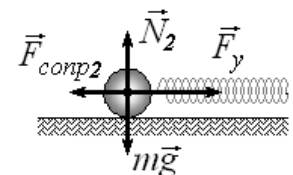
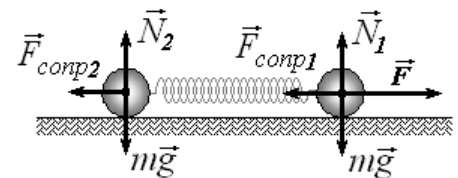
Аналогично применяя второй закон Ньютона к установившемуся движению шара 2, получим

$$ma = 0 = F_y - F_{comp2}.$$

Из (7) найдем модуль силы упругости

$$F_y = F_{comp2} = \frac{F}{2}. \quad (8)$$

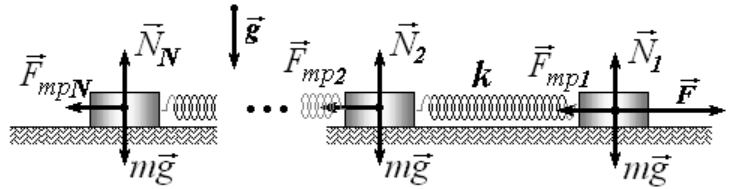
Применяя закон Гука, находим абсолютное удлинение пружины Δx в зависимости от модуля F приложенной силы



$$F_y = \frac{F}{2} = k\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{F}{2k}. \quad (9)$$

Как следует из (9), абсолютное удлинение пружины Δx в данном случае также прямо пропорционально модулю F силы, приложенной к одному из шаров. Опять же интересно, что коэффициент сопротивления β также не вошел в окончательный ответ.

1.3 В случае произвольного количества N брусков действуем аналогично пункту 1.1 задачи. Рассмотрим все бруски как целое (систему), имеющую массу $M = N \cdot m$. Силы упругости пружин в данном случае опять являются внутренними (действуют попарно) и их можно не учитывать при записи второго закона Ньютона

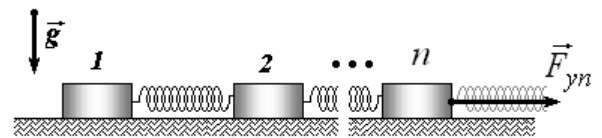


$$Nma = F - NF_{mp} = F - N\mu mg. \quad (10)$$

Из (10) найдем ускорение системы как целого

$$a = \frac{F - N\mu mg}{Nm}. \quad (11)$$

Далее рассмотрим n -ый брусок от конца цепочки. Сила упругости n -ой пружины F_{yn} , действующая на него слева, разгоняет n брусков, следовательно, второй закон Ньютона для системы рассматриваемых брусков примет вид



$$nma = F_{yn} - nF_{mp} = F_y - n\mu mg \quad (12)$$

Из (12) найдем модуль F_{yn} силы упругости n -ой пружины

$$F_{yn} = \frac{n}{N} F. \quad (13)$$

Согласно (13) натяжение пружин цепочки возрастает пропорционально номеру n пружины от конца цепочки. Следовательно, минимальное натяжение будет у пружины с номером $n = 1$ (в конце цепочки), а максимальное — с номером $n = N - 1$, у пружины в начале цепочки, прикрепленной к грузу, на который действует сила \vec{F} .

Аналогично будет вести себя и абсолютная деформация n -ой пружины

$$\Delta x_n = \frac{F_{yn}}{k} = \frac{n}{N} \frac{F}{k}. \quad (14)$$

Как следует из (14) для нахождения суммарного удлинения всех пружин $\Delta x_{общ}$ необходимо найти сумму членов арифметической прогрессии

$$\Delta x_{общ} = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_{N-1} = \sum_{n=1}^{N-1} \Delta x_n. \quad (15)$$

При записи (15) учтено, что между N брусками расположено $N - 1$ пружина.

Суммирование дает

$$\Delta x_{общ} = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_{N-1} = \frac{1}{N} \frac{F}{k} + \frac{2}{N} \frac{F}{k} + \dots + \frac{N-1}{N} \frac{F}{k} = \frac{F}{Nk} (1 + 2 + \dots + (N-1)) = \frac{F}{k} \frac{(N-1)}{2} \quad (16)$$

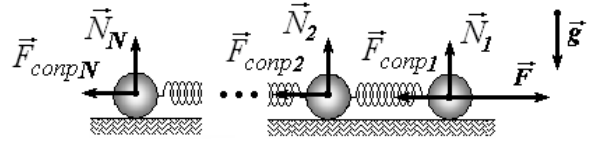
Окончательный ответ

$$\Delta x_{общ} = \frac{F(N-1)}{k \cdot 2}. \quad (17)$$

1.4 Поведение системы из N шаров, движущихся в вязкой среде, будет аналогично поведению двух шаров, рассмотренных в пункте 1.2 задачи — с течением времени скорости шаров перестанут меняться, т.е. примут некоторое установившееся значение v_2 . (ускорение системы станет равным нулю $a = 0$).

Деформации пружин при этом также будут оставаться неизменными.

Запишем второй закон Ньютона для установившегося движения системы (ускорение равно нулю)



$$F - NF_{сomp} = 0 \Rightarrow F_{сomp} = \frac{F}{N} \quad (18)$$

Опять же рассмотрим n -ый шарик от конца цепочки. Сила упругости n -ой пружины F_{yn} , действующая на него слева, движет n брусков, следовательно, второй закон Ньютона для рассматриваемых шариков примет вид

$$ma = 0 = F_{yn} - nF_{сomp} \Rightarrow F_{yn} = \frac{n}{N}F \quad (19)$$

Как видим результат (19) полностью аналогичен выражению (13) для предыдущего пункта задачи. Следовательно, суммарное удлинение пружин $\Delta x_{общ}$ в данном случае также можно просчитать как сумму соответствующей арифметической прогрессии

$$\Delta x_{общ} = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_{N-1} = \frac{F}{Nk}(1 + 2 + \dots + (N-1)) = \frac{F(N-1)}{k \cdot 2}. \quad (20)$$

Окончательный ответ

$$\Delta x_{общ} = \frac{F(N-1)}{k \cdot 2}. \quad (21)$$

При большом числе шаров ($N \rightarrow \infty$) единиц в числителе (21) можно пренебречь. В таком случае выражение для суммарного удлинения принимает вид

$$\Delta x_{общ} \approx \frac{F N}{k \cdot 2}$$

Интересно, что при рассмотрении различных механизмов трения (сухого и вязкого) окончательные результаты (17) и (21) для суммарного удлинения систем совпали. Подумайте самостоятельно, всегда ли будет иметь место подобное совпадение.

Задача 10.1 Смотри решение первой и второй частей задачи 11.1

Задача 10.2. На грани...

На грани. Решение

1.1 Сопротивление элемента равно сопротивлению двух последовательно соединенных проводников. Один (жидкий) имеет сопротивление:

$$R_{ж} = 2R_0 \frac{x}{l} \quad (1),$$

другой (твердый):

$$R_T = R_0 \frac{l-x}{l} \quad (2).$$

Таким образом, сопротивление элемента равно:

$$R = R_0 \left(1 + \frac{x}{l}\right) \quad (3).$$

1.2 Напряжение меняется медленно, поэтому в любой момент времени мощность тепловых потерь равна мощности тепловыделения вследствие протекания тока. Т. к. в течение плавления температура элемента не изменяется, то не изменяется и мощность тепловых потерь, а значит, выполняется условие:

$$\frac{U^2}{R} = const = \frac{U_0^2}{R_0} \quad (4).$$

В расплавленном состоянии сопротивление элемента равно $2R_0$, следовательно, напряжение на элементе равно:

$$U = U_0 \sqrt{2} \quad (5).$$

1.3 При напряжении меньшем U_0 (твердое состояние) сопротивление равно R_0 . При напряжении большем $U_0 \sqrt{2}$ материал элемента полностью расплавлен и сопротивление равно $2R_0$. Между этими значениями, исходя из (4), зависимость сопротивления элемента от напряжения имеет вид:

$$R = R_0 \frac{U^2}{U_0^2} \quad (6).$$

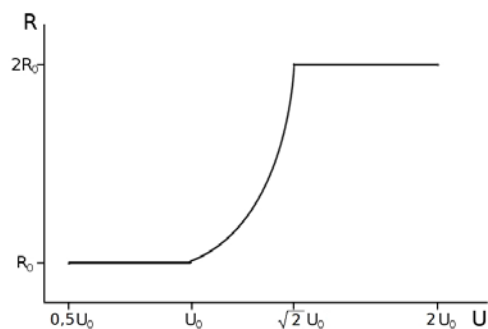
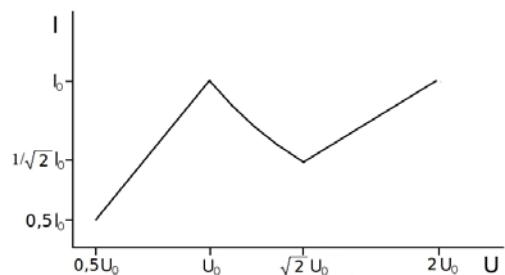


График зависимости представлен на рисунке.

1.4 При напряжении меньшем U_0 и большем $U_0 \sqrt{2}$ ВАХ элемента — прямая линия с наклоном R_0 и $2R_0$ соответственно. На участке плавления зависимость тока от напряжения имеет вид:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U_0^2}{R_0 U} = \frac{U_0 I_0}{U} \quad (7),$$



где $I_0 = U_0 / R_0$. ВАХ элемента изображена на рисунке.

2.1 Плавление начнется, когда напряжение на элементе достигнет значения U_0 . Т. к. до этого материал элемента находился в твердом состоянии с сопротивлением R_0 , то плавление начнется, когда напряжение на всей цепи будет в два раза больше.

Предположим, что напряжение на всей цепи достаточно высокое, чтобы материал элемента находился в расплавленном состоянии (сопротивление $2R_0$). Начнем постепенно уменьшать напряжение. Кристаллизация начинается при напряжении на элементе $U_0\sqrt{2}$. Тогда напряжение на всей цепи равно $\frac{3}{\sqrt{2}}U_0$. Таким образом материал элемента будет частично расплавлен при:

$$U \in \left(2U_0; \frac{3}{\sqrt{2}}U_0 \right) \quad (8).$$

2.2 Сила тока в цепи в крайних случаях очевидно равна $I_0 = U_0 / R_0$ и $I_0\sqrt{2}$. Когда элемент находится в промежуточном состоянии, сила тока определяется решением уравнения:

$$IR_0 + \frac{I_0U_0}{I} = U \quad (9),$$

где IR_0 — напряжение на резисторе;

$\frac{I_0U_0}{I}$ — напряжение на элементе.

Решение этого уравнения имеет вид:

$$I = \frac{U \pm \sqrt{U^2 - 4R_0I_0U_0}}{2R_0} = \frac{U \pm \sqrt{U^2 - 4U_0^2}}{2R_0} = \frac{U_0}{R_0} \left(\frac{U}{U_0} \pm \sqrt{\frac{U^2}{U_0^2} - 4} \right) \quad (10).$$

Подставляя значение $U = U_0 \left(\frac{2 + 3/\sqrt{2}}{2} \right)$, получим два решения:

$$I = 1,28 \frac{U_0}{R_0} \quad (11)$$

$$I = 0,782 \frac{U_0}{R_0} \quad (12).$$

Очевидно, что решение (11) не имеет смысла, т. к. при таком токе материал элемента полностью расплавлен. Поэтому верным является решение (12).

2.3 Вначале определим, при каком напряжении элемент начинает плавиться, а при каком кристаллизоваться. Рассуждая аналогично п.2.1, получим: $U_{MIN} = 3U_0$ и $U_{MAX} = 2\sqrt{2}U_0 = 2.82U_0$, что выглядит довольно противоречиво. Попробуем решить задачу с помощью ВАХ элемента. Для определения тока необходимо решить уравнение:

$$U_{ЭЛ} + U_{РЕЗ} = U \quad (13),$$

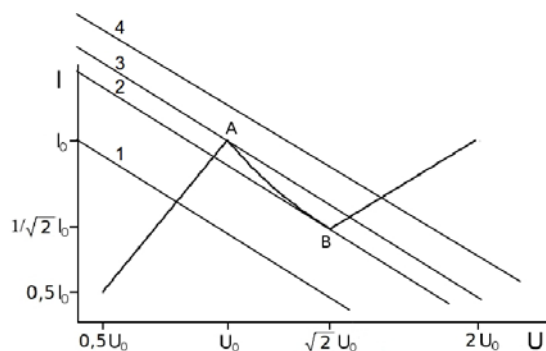
или в другой форме:

$$U_{ЭЛ} = U - 2R_0I \quad (14).$$

Точка пересечения ВАХ элемента с прямой $U - 2R_0I$ даст решение уравнения.

На графике изображены четыре прямых, соответствующих различным напряжениям.

Видим, что при некоторых напряжениях (прямые 2 и 3), одновременно существуют два решения. Одно — при сопротивлении элемента R_0 , другое — при $2R_0$. Прямые, проходящие между 2 и 3, пересекают ВАХ три раза. Однако заметим, что для того, чтобы «перепрыгнуть» с прямолинейного участка ВАХ в точку В или в точку, лежащую на гиперболическом участке, материал элемента должен начать плавиться. А этого не произойдет



до тех пор, пока напряжение на нем не достигнет U_0 (точка А). Поэтому, вплоть до напряжения на всей цепи $U_{MIN} = 3U_0$, ток будет линейно увеличиваться от значения

$$\frac{2U_0}{3R_0} = \frac{2}{3}I_0 = 0,67I_0 \text{ до } \frac{3U_0}{3R_0} = I_0.$$

При дальнейшем увеличении напряжения сразу произойдет переход на второй прямолинейный участок ВАХ. Физически это означает, что как только начинается плавление и сопротивление элемента возрастает, мощность, выделяемая в проводнике, становится больше рассеиваемой мощности. Поэтому устойчивые состояния с частично расплавленным материалом не реализуются. Таким образом, ток в цепи достаточно быстро (за время, необходимое для плавления материала)

уменьшится до значения $\frac{3U_0}{4R_0} = \frac{3}{4}I_0 = 0,75I_0$.

Затем ток будет линейно увеличиваться до значения

$$\frac{4U_0}{4R_0} = I_0.$$

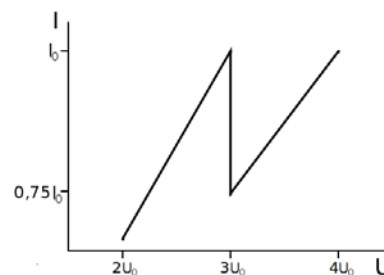


График зависимости тока в цепи от напряжения представлен на рисунке.

Заметим, что при уменьшении напряжения зависимость тока от напряжения несколько изменится, т. к. переход из жидкого состояния в твердое начнется при достижении точки В, т. е. при напряжении $U_{MAX} = 2\sqrt{2}U_0 = 2,82U_0$.

Задача 10.3 «Эксцентричная машинка»

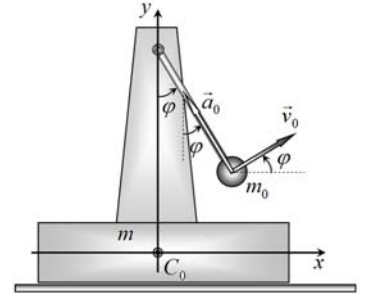
1. Координаты (x_C, y_C) центра масс системы, состоящей из двух тел, определяются по формулам

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad y_C = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}.$$

где m_1, m_2 - массы тел, (x_1, y_1) и (x_2, y_2) - координаты их центров масс.

Свяжем систему отсчета с центром масс платформы C_0 . В этой системе отсчета координаты центра масс рассчитываются по формулам

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{m_0 r \sin \varphi}{m + m_0} \\ y_C &= \frac{h - m_0 r \cos \varphi}{m + m_0} \end{aligned} \quad (1)$$



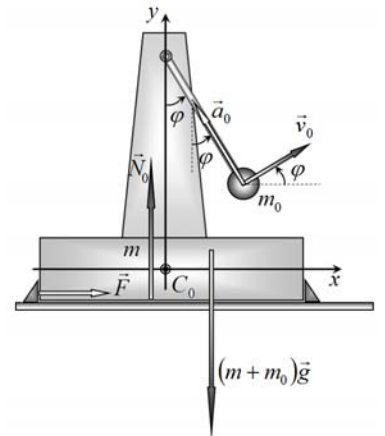
где h высота точки подвеса (несущественная для дальнейшего).

Вектор скорости движения шарика направлен перпендикулярно стержню и по модулю равен $v_0 = r\omega$. Проекции скорости центра масс системы определяются по формулам аналогичным (1). В рассматриваемом случае они равны

$$\begin{aligned} v_{xc} &= \frac{m_0 r \omega \cos \varphi}{m + m_0} \\ v_{yc} &= \frac{m_0 r \omega \sin \varphi}{m + m_0} \end{aligned} \quad (2)$$

Ускорение шарика является центростремительным, поэтому направлено к оси вращения, равным по модулю $a_0 = r\omega^2$. Так же не сложно спроецировать это ускорение на оси координат и найти тем самым ускорение центра масс системы:

$$\begin{aligned} a_{xc} &= -\frac{m_0 r \omega^2 \sin \varphi}{m + m_0} \\ a_{yc} &= \frac{m_0 r \omega^2 \cos \varphi}{m + m_0} \end{aligned} \quad (3)$$



2. Эту задачу проще всего решать, используя известное обобщение уравнения второго закона Ньютона для произвольной системы:

$$m \vec{a}_C = \vec{F}_{\text{вн.}}, \quad (4)$$

произведение массы всей системы на ускорения центра масс равно сумме внешних сил, действующих на систему (иными словами – внутренние силы не могут изменить скорость центра масс). В рассматриваемой задаче внешними силами, действующими на систему, являются: $(m + m_0)\vec{g}$ - сила тяжести, \vec{N}_0 - сила реакции горизонтальной поверхности, \vec{F} - силы реакции опор, удерживающих платформу.

В проекции на вертикальную ось уравнение (4) будет иметь вид (пока сама платформа неподвижна):

$$(m + m_0) a_{yc} = N_0 - (m + m_0) g. \quad (5)$$

Платформа начнет попрыгивать, когда нормальная реакция обратится в нуль $N_0 = 0$. Выражая из уравнения (5) модуль этой силы и используя выражения (3), получим

$$N_0 = (m + m_0)g + (m + m_0)a_{yc} = (m + m_0)g + m_0 r \omega^2 \cos \varphi = 0 \quad (6)$$

Минимальная угловая скорость ω_0 , при которой возможно выполнения условия отрыва (6), соответствует углу отрыва, при котором $\cos \varphi = -1$, т.е. когда стержень расположен вертикально. В этом случае из уравнения (6) находим

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{(m + m_0)g}{m_0 r}} \quad (7)$$

Дополнение (альтернативный вариант).

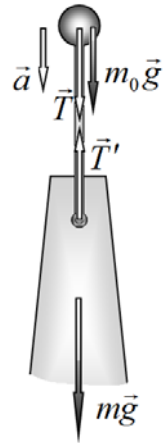
Данный пункт задачи допускает и более традиционное решение. При минимальной угловой скорости отрыв произойдет, когда шарик находится в верхней точке. В этом случае сила реакции стержня T определяется из уравнения второго закона Ньютона для шарика

$$m_0 r \omega^2 = m_0 g + T.$$

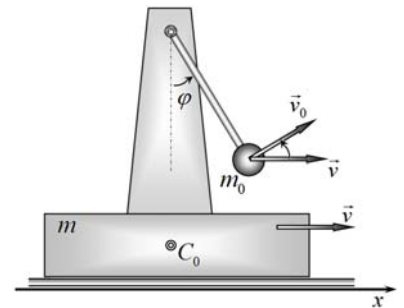
Отрыв платформы от горизонтальной поверхности произойдет, если эта сила превысит силу тяжести платформы:

$$T > mg.$$

Из этих двух условий следует выражение (7) для минимальной угловой скорости, при которой платформа начнет отрываться от поверхности.



3. Рассмотрим движение платформы в инерциальной системе отсчета, связанной с неподвижной горизонтальной поверхностью. Обозначим¹ скорость платформы \vec{v} . В этой системе отсчета движение шарика является «составным»: равномерное вращение вокруг оси и поступательное движение вместе с платформой. Так как в данном случае нет внешних сил, имеющих горизонтальные составляющие, то ускорение центра масс всей системы должно быть равно нулю! Следовательно, скорость центра масс системы должна оставаться неизменной и определяться начальным



условием – скоростью центра масс в момент отпускания платформы. Для определения скорости центра масс всей системы необходимо к найденной скорости центра масс, в системе отсчета, связанной с платформой прибавить скорость движения платформы

$$v_{xc} = \frac{m_0 r \omega \cos \varphi}{m + m_0} + v = const. \quad (8)$$

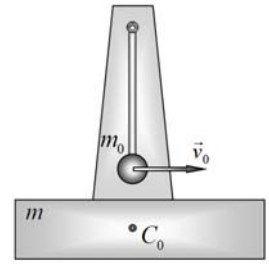
Заметим, что скорость центра масс может быть найдена и непосредственно и закона сложения скоростей

$$v_{xc} = \frac{m_0 (v + r \omega \cos \varphi) + mv}{m + m_0} \quad (8^*)$$

¹ Заранее не очевидно, куда будет направлена эта скорость. Поэтому на рисунке мы направили ее в положительном направлении оси Ox , а дальше уравнения «покажут» куда она направлена на самом деле!

3.1 Константа в выражении (8) определяется скоростью центра масс в момент времени, когда отпустили платформу. Если платформу отпустили в тот момент, когда шарик находился в нижней точке, то горизонтальная составляющая скорости равна $v_0 = r\omega$, а скорость платформы равна нулю. Следовательно, скорость центра масс в этот момент времени (она же константа в выражении (8)) равна

$$v_{xc0} = \frac{m_0 r \omega}{m + m_0}.$$



Подставляя это значение в уравнение (8), находим из него зависимость скорости платформы от времени (с учетом того, что $\varphi = \omega t$)

$$\frac{m_0 r \omega \cos \varphi}{m + m_0} + v = \frac{m_0 r \omega}{m + m_0} \Rightarrow v = \frac{m_0 r \omega}{m + m_0} (1 - \cos \omega t). \quad (9)$$

Чтобы записать закон движения платформы, обратим внимание, что выражение для ее скорости содержит две составляющих: одну постоянную $\frac{m_0 r \omega}{m + m_0}$, вторую переменную

$-\frac{m_0 r \omega}{m + m_0} \cos \omega t$, которая изменяется по тому же закону, что и скорость центра масс в

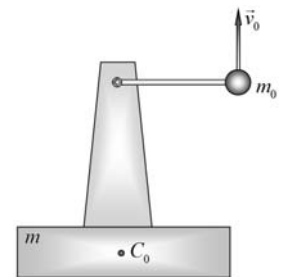
системе отсчета, связанной с платформой (2), только с противоположным знаком! Первая составляющая описывает равномерное движение, вторая описывается тем же законом, что и координата центра масс x_C (1), только с противоположным знаком. Таким образом, закон движения платформы может быть записан в виде

$$x(t) = \frac{m_0 r \omega}{m + m_0} t - \frac{m_0 r}{m + m_0} \sin \omega t = \frac{m_0 r}{m + m_0} (\omega t - \sin \omega t). \quad (10)$$

Строго говоря, в этом выражении следует добавить начальную координату x_0 , однако, совместив начало отсчета оси Ox с начальным положением платформы, мы эту постоянную делаем равным нулю.

3.2 Если платформу отпустили, когда стержень располагался горизонтально, то в этот момент времени горизонтальная проекция скорости шарика равна нулю, следовательно, и скорость центра масс всей системы также равна нулю. Поэтому в этом случае из уравнения (8) следует, что скорость платформы равна

$$\frac{m_0 r \omega \cos \varphi}{m + m_0} + v = 0 \Rightarrow v = -\frac{m_0 r \omega \cos \varphi}{m + m_0}. \quad (11)$$



Следовательно, зависимость координаты от угла поворота в данном случае имеет вид

$$x(\varphi) = x_0 - \frac{m_0 r}{m + m_0} \sin \varphi. \quad (12)$$

Учтем, что при $t = 0$ $\varphi = \pi/2$, и запишем зависимость координаты от времени в виде

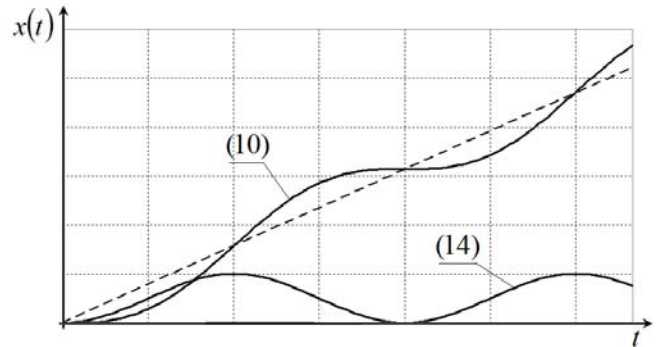
$$x(t) = x_0 - \frac{m_0 r}{m + m_0} \sin(\omega t + \pi/2) = x_0 - \frac{m_0 r}{m + m_0} \cos \omega t. \quad (13)$$

Наконец, полагая, что при $t = 0$ $x = 0$, находим $x_0 = \frac{m_0 r}{m + m_0}$ и получаем окончательный вид закона движения

$$x(t) = \frac{m_0 r}{m + m_0} (1 - \cos \omega t). \quad (14)$$

Полученное выражение легко объяснимо – платформа движется так, что положение центра масс всей системы x_c остается неизменным.

Схематические графики полученных законов движения (10) и (14) показаны на рисунке. Видно их принципиальное различие в одном случае платформа колеблется вокруг некоторого среднего положения, во втором – колебания накладываются на поступательное движение.



4. В этом случае также воспользуемся уравнением второго закона Ньютона для системы тел (4). В рассматриваемом в этом пункте задачи внешними силами, действующими на систему, являются: $(m + m_0)\vec{g}$ – сила тяжести, \vec{N}_0 – сила реакции горизонтальной поверхности, $\vec{F}_{mp.}$ – сила трения, действующая на платформу со стороны горизонтальной поверхности.

Для определения условий начала скольжения запишем уравнения второго закона Ньютона в проекциях на вертикальную и горизонтальную оси для покоящейся платформы:

$$\begin{aligned} (m + m_0)a_{yc} &= N_0 - (m + m_0)g \\ (m + m_0)a_{xc} &= F_{mp.} \end{aligned} \quad (15)$$

Подставим выражения для ускорения центра масс:

$$\begin{aligned} m_0 r \omega^2 \cos \varphi &= N_0 - (m + m_0)g \\ -m_0 r \omega^2 \sin \varphi &= F_{mp.} \end{aligned} \quad (16)$$

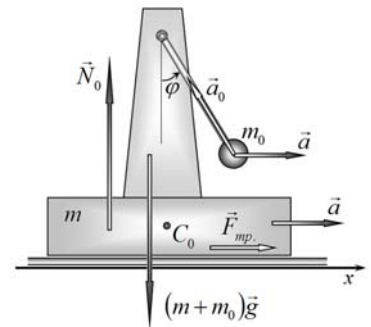
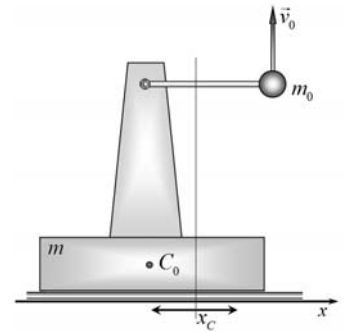
В этих уравнениях $F_{mp.}$ – сила трения покоя, платформа не будет проскальзывать, если модуль силы трения не достигнет своего максимального значения, то есть при выполнении условия

$$|F_{mp.}| < \mu N_0. \quad (17)$$

Выразим из уравнений (16) значение силы реакции и подставим их в неравенство (17)

$$\begin{cases} F_{mp.} = -m_0 r \omega^2 \sin \varphi \\ N_0 = (m + m_0)g + m_0 r \omega^2 \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow |\sin \varphi| < \mu \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \cos \varphi \right) \quad (18)$$

где $\omega_0^2 = \frac{(m + m_0)g}{m_0 r}$ – частота, при которой происходит отрыв от горизонтальной поверхности, найденная ранее в п. 2.



Схематически построим графики функций (рис. 10), входящих в неравенство (18). Из этих графиков следует, что при постепенном увеличении угловой скорости произойдет в интервале углов $\varphi \in [\pi/2, \pi]$, где синус угла положителен. Поэтому для определения угла, при котором произойдет срыв необходимо решить уравнение

$$\sin \varphi = \mu \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \cos \varphi \right). \quad (19)$$

Для его решения проведем известные преобразования

$$\begin{aligned} \sin \varphi - \mu \cos \varphi &= \sqrt{1 + \mu^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} \sin \varphi - \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \cos \varphi \right) = \\ &= \sqrt{1 + \mu^2} \sin(\varphi - \beta) \end{aligned}$$

где $\beta = \arctg \mu$. Теперь это уравнение преобразуется к простейшему виду

$$\sin(\varphi - \beta) = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \frac{\omega_0^2}{\omega^2}. \quad (20)$$

Минимальное значение угловой скорости вращения стержня, при которой начнется горизонтальное движение платформы, определяется условием

$$\frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = 1 \quad \omega_1 = \omega_0 \sqrt{\frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}}. \quad (21)$$

При этом угол, при котором произойдет срыв, оказывается равным

$$\sin(\varphi - \beta) = 1 \quad \varphi^* = \frac{\pi}{2} + \beta = \frac{\pi}{2} + \arctg \mu. \quad (22)$$

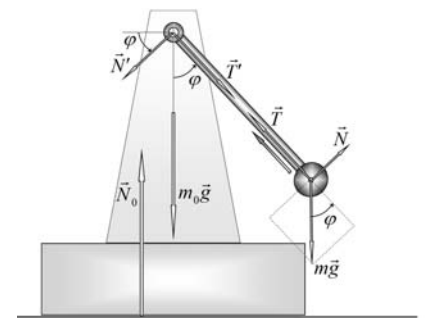
Подставляя численные значения параметров, вычислим минимальную скорость

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_0 \sqrt{\frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}} = \sqrt{\frac{(m + m_0)g}{m_0 r} \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}} = \sqrt{\frac{(1 + \eta)g}{\eta r} \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}} = \\ &= \sqrt{\frac{(1 + 0,20) \cdot 9,8}{0,20 \cdot 1,0} \frac{0,35}{\sqrt{1 + 0,35^2}}} \approx 4,4 \text{ c}^{-1} \end{aligned} \quad (23)$$

5. Из рисунка 10б следует что, при малом превышении скорости ω_1 , за один оборот срыв будет происходить дважды – один раз в одну сторону, другой раз в другую (при прочих равных условиях), поэтому средняя скорость движения платформы будет равна нулю.

Последнее замечание.

Задача может решаться и более традиционным способом, рассматривая силы, возникающие в стержне и действующие на ось и на шарик. Только следует учитывать, что при ускоренном движении платформы и при раскручивании шарика помимо продольных, будут присутствовать и поперечные силы (см. рис. 11).



Задача 11.1. Переносы...

Часть 1 Перенос вещества.

Для решения данной задачи необходимо последовательно рассмотреть изменения концентраций растворов при каждом переливании. Понятно, что при сливании растворов будут сохраняться суммарная масса растворенного вещества и их общий объем.

1.1 Массы растворенного вещества в сосудах и их общая масса определяются по очевидным формулам

$$m_A = x_0V; \quad m_B = y_0V \quad \Rightarrow \quad m_0 = x_0V + y_0V. \quad (1.1)$$

1.2 При наполнении малого сосуда в него попадет масса раствора, равная $\delta m_{A \rightarrow B} = x_0v$. Эта масса попадет во второй сосуд, поэтому масса растворенного вещества во втором сосуде окажется равной $m_B = y_0V + \delta m_{A \rightarrow B} = y_0V + x_0v$, а его концентрация станет равной

$$y_1 = \frac{m_B}{V+v} = \frac{y_0V + x_0v}{V+v}. \quad (1.2)$$

Зачерпнув из второго сосуда, мы «захватим» массу растворенного вещества равную $\delta m_{B \rightarrow A} = y_1v$. Она попадет в первый сосуд, при этом концентрация раствора в этом сосуде станет равной

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{x_0(V-v) + y_1v}{(V-v) + v} = \frac{x_0(V-v) + \frac{y_0V + x_0v}{V+v}v}{V} = \\ &= \frac{x_0(V^2 - v^2) + y_0Vv + x_0v^2}{V(V+v)} = \frac{x_0V^2 + y_0Vv}{V(V+v)} = \frac{x_0V + y_0v}{V+v} \end{aligned} \quad (1.3)$$

1.3 Расчет разностей концентраций требует только аккуратности в алгебраических преобразованиях:

$$y_1 - x_0 = \frac{y_0V + x_0v}{V+v} - x_0 = \frac{y_0V + x_0v - x_0V - x_0v}{V+v} = (y_0 - x_0) \frac{V}{V+v}. \quad (1.4)$$

$$x_1 - y_1 = \frac{x_0V + y_0v}{V+v} - \frac{y_0V + x_0v}{V+v} = \frac{x_0(V-v) + y_0(v-V)}{V+v} = (x_0 - y_0) \frac{V-v}{V+v}. \quad (1.5)$$

Полученная формула является основой дальнейшего решения: разность концентраций после одного цикла уменьшается в

$$\lambda = \frac{V-v}{V+v} \quad (1.6)$$

раз. Это соотношение можно обобщить на любой следующий полный цикл переливания

$$x_k - y_k = \lambda(x_{k-1} - y_{k-1}). \quad (1.7)$$

Следовательно, разности концентраций образуют геометрическую прогрессию, поэтому разность концентрации можно выразить в явном виде.

$$x_k - y_k = (x_0 - y_0) \lambda^k \quad (1.8)$$

1.4 Массы растворенных веществ выражаются через концентрации растворов

$$m_{Ak} = x_kV; \quad m_{Bk} = y_kV. \quad (1.9)$$

Общая масса этого вещества осталась неизменной, определяемой по формуле (1). Поэтому можно выразить и сумму концентраций растворов

$$(x_k + y_k)V = (x_0 + y_0)V \quad \Rightarrow \quad x_k + y_k = x_0 + y_0. \quad (1.10)$$

1.5 Таким образом, мы получили два уравнения (1.8) и (1.10) для определения концентраций растворов, решение которых представляет чисто техническую проблему, складывая эти уравнения получим концентрацию раствора в первом сосуде

$$\begin{cases} x_k - y_k = (x_0 - y_0)\lambda^k \\ x_k + y_k = x_0 + y_0 \end{cases} \Rightarrow x_k = \frac{1}{2}x_0(1 + \lambda^k) + \frac{1}{2}y_0(1 - \lambda^k). \quad (1.11)$$

Концентрацию раствора во втором сосуде можно выразить из уравнения (1.8):

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - (x_0 - y_0)\lambda^k = x_k = \frac{1}{2}x_0(1 + \lambda^k) + \frac{1}{2}y_0(1 - \lambda^k) - (x_0 - y_0)\lambda^k = \\ &= \frac{1}{2}x_0(1 - \lambda^k) + \frac{1}{2}y_0(1 + \lambda^k) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Наконец, подставляя значение параметра λ , получим выражения для концентраций через известные исходные параметры

$$x_k = \frac{1}{2}x_0 \left(1 + \left(\frac{V-v}{V+v} \right)^k \right) + \frac{1}{2}y_0 \left(1 - \left(\frac{V-v}{V+v} \right)^k \right). \quad (1.13)$$

$$y_k = \frac{1}{2}x_0 \left(1 - \left(\frac{V-v}{V+v} \right)^k \right) + \frac{1}{2}y_0 \left(1 + \left(\frac{V-v}{V+v} \right)^k \right). \quad (1.14)$$

Часть 2. Перенос теплоты «вручную».

Эта задача практически полностью аналогична первой части. Аналогом массы растворенного вещества служит количество переданной теплоты, а аналогом концентрации раствора – температура. Поэтому следует ожидать, что разности температур после одного цикла переноса («туда и обратно») будут составлять геометрическую прогрессию. Так в после опускания тела (имеющего температуру равную начальной температуре в первом сосуде), установится температура y_1 , которую можно найти из уравнения теплового баланса²

$$C_0(x_0 - y_1) = cm(y_1 - y_0) \Rightarrow y_1 = \frac{C_0x_0 + cmy_0}{C_0 + cm}. \quad (2.1)$$

Аналогичное уравнение можно записать для определения установившуюся температуру в первом сосуде, после повторного опуская тела

$$C_0(x_1 - y_1) = cm(x_0 - x_1) \Rightarrow x_1 = \frac{cmx_0 + C_0y_1}{C_0 + cm}. \quad (2.2)$$

Вычислив разности температур после первого цикла переноса

$$\begin{aligned} x_1 - y_1 &= \frac{cmx_0 + C_0y_1}{C_0 + cm} - y_1 = \frac{cmx_0 - cmy_1}{C_0 + cm} = \\ &= \frac{cmx_0 - cm \frac{C_0x_0 + cmy_0}{C_0 + cm}}{C_0 + cm} = \left(\frac{cm}{C_0 + cm} \right)^2 (x_0 - y_0) \end{aligned} \quad (2.3)$$

видим, что аналогичное соотношения справедливо для любого цикла переноса, поэтому соотношение (3) показывает, что разности температур изменяются в геометрической прогрессии

$$x_k - y_k = (x_0 - y_0) \left(\frac{cm}{cm + C_0} \right)^{2k} = (x_0 - y_0)\lambda^k. \quad (2.4)$$

² В принципе, можно записывать уравнения вида (4) из первой части, истолковывая их в духе закона сохранения энергии. Однако мы предпочитаем более традиционную запись в виде уравнений теплового баланса.

где обозначено

$$\lambda = \left(\frac{cm}{cm + C_0} \right)^2. \quad (2.5)$$

Теперь запишем уравнения теплового баланса для теплоты, перенесенной за k циклов:

$$(cm + C_0)(x_k - x_0) = cm(y_0 - y_k). \quad (2.6)$$

Это уравнение перепишем в виде:

$$(cm + C_0)x_k + cm y_k = (cm + C_0)x_0 + cm y_0. \quad (2.7)$$

Так тело, с помощью которого осуществляется перенос теплоты, является малым, то в уравнении (6) можно считать, что $C_0 \ll cm$, и пренебречь малой теплоемкостью C_0 . В этом случае получим

$$x_k + y_k = x_0 + y_0. \quad (2.8)$$

Заметим, что использовать такое приближение в формуле (2.5) нельзя, так в этом случае $\lambda = 1$ и никакого переноса теплоты не будет.

Таким образом, мы получаем систему уравнений (2.4) и (2.8), для определения температур воды в сосудах, что и система уравнений (1.8) и (1.10) для определения концентраций. Поэтому температуры воды в сосудах будут определяться такими же соотношениями, как и выражения (1.11)-(1.12) для концентраций:

$$x_k = \frac{1}{2}x_0(1 + \lambda^k) + \frac{1}{2}y_0(1 - \lambda^k), \quad (2.8)$$

$$y_k = \frac{1}{2}x_0(1 - \lambda^k) + \frac{1}{2}y_0(1 + \lambda^k). \quad (2.9)$$

Только в этих выражениях параметр λ определяется по формуле (2.5)

Не обязательное дополнение.

Использование приближения $C_0 \ll cm$ не является обязательным. Можно точно решить и систему уравнений (2.4) и точного уравнения (2.7). Эти уравнение образуют систему, из которой не сложно найти явные выражения для температур воды в сосудах.

В первом:

$$\begin{cases} x_k - y_k = (x_0 - y_0)\lambda^k \\ \frac{cm + C_0}{cm}x_k + y_k = \frac{cm + C_0}{cm}x_0 + y_0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x_k = \frac{C_0}{2cm + C_0}x_0 + \frac{cm}{2cm + C_0}(x_0(1 + \lambda^k) + y_0(1 - \lambda^k))$$

Во втором:

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - (x_0 - y_0)\lambda^k = \\ &= \frac{cm + C_0}{2cm + C_0}(x_0(1 - \lambda^k) + y_0(1 + \lambda^k)) - \frac{C_0}{2cm + C_0}y_0 \end{aligned}$$

Если теперь положить $C_0 < cm$, то они переходят в формулы (2.8)-(2.9)

Часть 3. Перенос заряда.

Для решения этой задачи также можно воспользоваться аналогичным подходом. Только в данной задаче нам необходимо рассчитать изменение электрических зарядов, которые являются аналогами масс растворенных веществ (в первой части задачи) и количества теплоты (во второй части). Аналогом же концентраций и температур могут выступать электрические потенциалы. При контакте шаров происходит выравнивание именно их потенциалов. Если рассчитать изменение потенциалов, то далее можно найти и

значения зарядов шаров. Будем обозначать потенциалы первого шара после k полных циклов переноса - φ_k , а потенциалы второго шара ϕ_k . Строго говоря, при изменении расстояния между шарами их потенциалы изменяются (так как электрическое поле совершает работу), однако нас интересует количество перенесенного заряда, поэтому изменение потенциала при перемещении шарика для нас не существенно.

Пусть малый шарик касается большого, обозначим в этом положении электрическую емкость большого шара C , а емкость малого шарика c_0 , суммарная емкость системы равна $(C + c_0)$. Если суммарный заряд двух соприкасающихся шаров равен Q , то потенциал же шаров будет равен

$$\varphi = \frac{Q}{C + c_0} \quad (3.1)$$

заряд малого шарика (следовательно, и переносимый заряд) рассчитывается по формуле

$$q = \frac{c_0}{C + c_0} Q \quad (3.2)$$

3.1 Таким образом, заданный параметр γ выражается через отношение емкостей³

$$\gamma = \frac{c_0}{C + c_0}, \quad 1 - \gamma = \frac{C}{C + c_0} \quad (3.3)$$

Для оценки этого параметра можно воспользоваться выражением для электрической емкости уединенного шара, которая пропорциональна его радиусу, то есть

$$\gamma \approx \frac{r}{R + r}. \quad (3.4)$$

Это выражение является приближенным, так как при электрическом контакте изменяется распределение зарядов на поверхностях шаров. В дальнейшем мы будем использовать выражение (3.3) для данного параметра.

3.2 Дальнейший ход решения полностью аналогичен решениям первых двух частей данной проблемы: основная идея остается прежней – получить рекуррентные соотношения для потенциалов шаров после каждого цикла переноса зарядов. «Начальным состоянием» будем считать, момент, когда маленький шарик первый раз касается первого шара.

Итак, мы прикоснулись маленьким шариком к первому шару, потенциал этой систему оказался равным

$$\varphi_0 = \frac{x_0}{C + c_0}. \quad (3.5)$$

На маленький шарик перетечет заряд равный $q = \frac{x_0 c_0}{C + c_0} = c_0 \varphi_0$, а на шаре остается заряд

$C \varphi_0$. Заряд второго шарика выразим через его начальный потенциал $y_0 = C \phi_0$. Если шарик поднести ко второму шару, то суммарный заряд этой системы окажется равным $\tilde{y} = C \phi_0 + c_0 \varphi_0$, а ее потенциал

$$\phi_1 = \frac{C \phi_0 + c_0 \varphi_0}{C + c_0} = (1 - \gamma) \phi_0 + \gamma \varphi_0. \quad (3.6)$$

На маленьком шарике окажется заряд $q = c_0 \phi_1$, а на втором шаре останется заряд $y_1 = C \phi_1$.

Далее маленький шарик переносят к первому шару, суммарный заряд этой системы оказывается равным $(C \varphi_0 + c_0 \phi_1)$, соответственно, потенциал системы

³ Приводим также выражение для $(1 - \gamma)$, так оно нам понадобится в дальнейшем

$$\varphi_1 = \frac{C\varphi_0 + c_0\phi_1}{C + c_0} = (1 - \gamma)\varphi_0 + \gamma\phi_1. \quad (3.7)$$

Далее по общей схеме, находим разность потенциалов шаров после первого цикла переносов:

$$\begin{aligned} \varphi_0 - \phi_1 &= \varphi_0 - (1 - \gamma)\phi_0 - \gamma\varphi_0 = (1 - \gamma)(\varphi_0 - \phi_0) \\ \varphi_1 - \phi_1 &= (1 - \gamma)\varphi_0 + \gamma\phi_1 - \phi_1 = (1 - \gamma)(\varphi_0 - \phi_1) = (1 - \gamma)^2(\varphi_0 - \phi_0). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Видим, что, как и в предыдущих частях, разности потенциалов изменяются в геометрической прогрессии

$$\varphi_k - \phi_k = (\varphi_0 - \phi_0)\lambda^k. \quad (3.9)$$

Здесь знаменатель прогрессии выражается через заданный в условии параметр γ :

$$\lambda = (1 - \gamma)^2. \quad (3.10)$$

Если пренебречь малым зарядом на маленьком шарике, с помощью которого осуществляется перенос, то заряды шариков пропорциональны их потенциалам, поэтому

$$x_k - y_k = (x_0 - y_0)\lambda^k. \quad (3.11)$$

Пренебрегая зарядом, находящимся на малом шарике, из условия сохранения заряда

$$x_k + y_k = x_0 + y_0. \quad (3.12)$$

Таким образом, мы в третий раз получаем систему уравнений (3.11), (3.12), решение которой найдено ранее

$$x_k = \frac{1}{2}x_0(1 + \lambda^k) + \frac{1}{2}y_0(1 - \lambda^k), \quad (3.13)$$

$$y_k = \frac{1}{2}x_0(1 - \lambda^k) + \frac{1}{2}y_0(1 + \lambda^k). \quad (3.14)$$

3.3 Разность зарядов определяется по формуле (3.9), поэтому относительная разность зарядов определяется по формуле

$$\varepsilon = \frac{x_k - y_k}{x_0 + y_0} = \frac{x_0 - y_0}{x_0 + y_0} \lambda^k = \frac{\frac{x_0}{y_0} - 1}{\frac{x_0}{y_0} + 1} \lambda^k. \quad (3.15)$$

Из этого уравнения находим необходимое число актов переноса

$$\lambda^k = \varepsilon \frac{\frac{x_0}{y_0} + 1}{\frac{x_0}{y_0} - 1} \Rightarrow k = \frac{\lg \varepsilon \frac{\frac{x_0}{y_0} + 1}{\frac{x_0}{y_0} - 1}}{\lg(1 - \gamma)^2} \approx 21 \quad (3.16)$$

Не обязательное дополнение.

Как и во второй части можно найти и точное решение полученной системы уравнений (3.9), (3.12). В уравнении (3.9) выразим потенциалы через искомые заряды:

$$\begin{aligned} \frac{x_k}{C + c_0} - \frac{y_k}{C} &= \left(\frac{x_0}{C + c_0} - \frac{y_0}{C} \right) \lambda^k \Rightarrow \frac{C}{C + c_0} x_k - y_k = \left(\frac{C}{C + c_0} x_0 - y_0 \right) \lambda^k \Rightarrow \\ (1 - \gamma)x_k - y_k &= ((1 - \gamma)x_0 - y_0)\lambda^k \end{aligned}$$

Добавляем к этому уравнению условие сохранения заряда, получим

$$\begin{cases} (1-\gamma)x_k - y_k = ((1-\gamma)x_0 - y_0)\lambda^k \\ x_k + y_k = x_0 + y_0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x_k = \frac{1}{2-\gamma} \left((1-\gamma)x_0(1+\lambda^k) + y_0(1-\lambda^k) \right) + \frac{\gamma}{2-\gamma} x_0$$

После этого находим заряд второго шара

$$y_k = x_0 + y_0 - \frac{1}{2-\gamma} \left((1-\gamma)x_0(1+\lambda^k) + y_0(1-\lambda^k) \right) - \frac{\gamma}{2-\gamma} x_0 =$$

$$= \frac{1}{2-\gamma} \left((1-\gamma)x_0(1-\lambda^k) + y_0(1+\lambda^k) \right) - \frac{\gamma}{2-\gamma} y_0$$

Если в этих выражениях положить $\gamma \ll 1$, то после упрощений получаем формулы (3.13)-(3.14). Разность зарядов в этом случае оказывается равной

$$x_k - y_k = \frac{2}{2-\gamma} ((1-\gamma)x_0 - y_0)\lambda^k + \frac{\gamma}{2-\gamma} (x_0 + y_0)$$

Последнее слагаемое в данной формуле равно заряду на маленьком шарике, поэтому его следует отбросить. Тогда из формулы для относительной разности зарядов шаров находим необходимое число циклов переноса

$$\varepsilon = \frac{x_k - y_k}{x_0 + y_0} = \frac{2((1-\gamma)x_0 - y_0)}{(2-\gamma)(x_0 + y_0)} \lambda^k = \frac{16}{20,9} \lambda^k \Rightarrow k = \frac{\lg 0,21/16}{2 \lg 0,9} \approx 21,$$

которое не отличается от полученного ранее.

Задача 11.2 Порометрия

Часть 1

Введем следующие обозначения: ρ_B — плотность воды, ρ — плотность материала пористого тела. Пренебрегая силой Архимеда действующей в воздухе, можем записать выражение для веса тела в воздухе:

$$P_{\text{Возд}} = \rho(V_0 - V_{\Pi})g \quad (1).$$

Вес тела в воде:

$$P_B = \rho(V_0 - V_{\Pi})g - \rho(V_0 - V_{\Pi})g \quad (2).$$

Вес в воде пористого тела с закрытыми порами:

$$P_{B3} = \rho(V_0 - V_{\Pi})g - \rho V_0 g \quad (3).$$

Согласно условия задачи:

$$P_{\text{Возд}} = 2P_B = 3P_{B3} \quad (4).$$

Решая систему получим:

$$V_0 = 4V_{\Pi} \quad (5),$$

т. е. пористость образца равна:

$$\xi = 25\% \quad (6).$$

Часть 2

Рассмотрим отдельную пору, которая, как сказано в условии, представляет собой трубку определенного радиуса r . Т. к. ртуть не смачивает материал пористого тела, то ее движение внутри поры возможно только в случае, если сила, создаваемая внешним давлением ($p \cdot \pi r^2$), превосходит силы поверхностного натяжения $\sigma_p \cdot 2\pi r$ (краевой угол 180°). Другим словами, как только давление достигает значения:

$$p = 2\sigma_p / r \quad (7),$$

ртуть полностью заполняет пору с радиусом r .

Анализируя график, приведенный в условии, делаем вывод, что максимальный радиус пор равен:

$$r_1 = 2\sigma_p / p_0 \quad (8),$$

т. к. при меньшем давлении ртуть не входит в образец.

Затем, при достижении давления $2p_0$ и $3p_0$ объем вошедшей ртути, снова резко увеличивается, т. е. ртуть проникает в поры с радиусами $r_2 = \sigma_p / p_0$ и $r_3 = 2\sigma_p / 3p_0$. Таким образом в исследуемом образце существуют поры трех видов с радиусами r_1 , $r_2 = r_1 / 2$ и $r_3 = r_1 / 3$.

Пусть общее количество пор равно $N = N_1 + N_2 + N_3$. Согласно зависимости приведенной на графике, объем ртути вошедшей в поры радиуса r_1 равен:

$$N_1 \pi r_1^2 l = 0,68 V_{MAX} \quad (9),$$

где l - длина поры.

Объем ртути вошедшей в поры радиуса r_2 и r_3 :

$$N_2 \pi r_2^2 l = 0,85 V_{MAX} - 0,68 V_{MAX} = 0,17 V_{MAX} \quad (10)$$

и

$$N_3 \pi r_3^2 l = V_{MAX} - 0,85 V_{MAX} = 0,15 V_{MAX} \quad (11)$$

соответственно.

Тогда отношение числа пор:

$$N_1 r_1^2 / N_2 r_2^2 / N_3 r_3^2 = 0,68 / 0,17 / 0,15 \quad (12).$$

Подставляя соотношения между радиусами пор, получим:

$$N_1 / (1/4) N_2 / (1/9) N_3 = 0,68 / 0,17 / 0,15 \quad (13).$$

Преобразовав выражение (13), получим:

$$N_1 / N_2 / N_3 = 1/1/2 \quad (14).$$

Таким образом, 50 % пор имеют радиус r_3 , 25 % - радиус r_2 и 25 % радиус r_1 .

Часть 3

В случае порометрии капиллярных потоков необходимо вытеснять воду из пор образца. Вода выйдет и поры с радиусом r , когда разность давления достигнет значения:

$$\Delta p = 2\sigma_B / r \quad (15).$$

т. е. при разности давлений меньше $\Delta p_0 = 2\sigma_B / r_1$ (значение r_1 определено в предыдущем пункте) газ не будет проходить через образец. После того, как откроются поры большего радиуса, установится некоторый массовый расход газа:

$$q = \rho v S \quad (16),$$

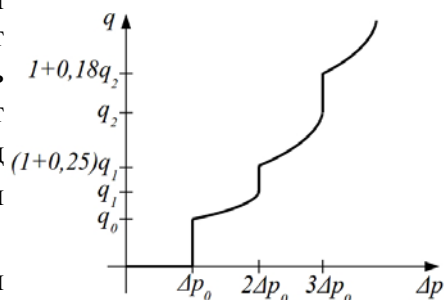
где ρ - плотность газа;

v - скорость движения газа в порах;

S - суммарная площадь поперечного сечения пор определенного радиуса.

При увеличении давления (если не открываются поры меньшего радиуса) массовый расход газа будет увеличиваться, т. к. с одной стороны возрастает скорость движения газа в порах ($v \sim \Delta P$), а с другой возрастает плотность газа $\rho \sim \Delta P$. Таким образом массовый расход будет изменяться пропорционально квадрату разности давлений $q \sim \Delta p^2$.

Затем при достижении давления $\Delta p = 2\sigma_B / r_2 = 2\Delta p_0$, расход снова резко увеличится, т. к.

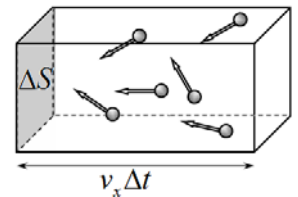


откроются поры радиуса r_2 . Суммарная площадь поперечного сечения этих пор в 4 раза меньше по сравнению с порами радиуса r_1 (количество пор такое же, но радиус в два раза меньше). Поэтому расход газа резко увеличится на 25 %.

Аналогичный «скачок» расхода произойдет, когда откроются самые маленькие поры. Площадь поперечного сечения увеличится на $0,15/(0,68 + 0,17) = 0,176 \approx 18\%$. На столько увеличится и расход газа. Качественный график зависимости расхода газа от разности давлений представлен на рисунке.

Задача 11.3 Испарение воды

1. Формулу для числа ударов молекул о стенку можно получить различными способами. Например, за время Δt до стенки долетят и ударятся о нее те молекулы, которые находятся на расстоянии меньшем $v_x \Delta t$, где v_x - проекция скорости молекулы на направление, перпендикулярное стенке. Если площадь рассматриваемой стенки равна ΔS , то число этих молекул равно (с учетом того, что половина молекул летит к стенке, а половина от нее)



$$\Delta N = \frac{1}{2} n |v_x| \Delta t \Delta S. \quad (1)$$

Далее необходимо провести усреднение по скоростям молекул. Корректный расчет приводит к результату

$$v = \frac{1}{4} n \langle v \rangle = \frac{1}{4} n \sqrt{\frac{8 RT}{\pi M}}. \quad (2)$$

Комментарий.

Трудно ожидать, что учащиеся средней школы выведут точно эту формулу, поэтому при оценивании работы приемлемы и другие значения коэффициентов в формуле (2). Например, более традиционное «школьное» выражение

$$v = \frac{1}{6} n v_{cp.кв.} = \frac{1}{6} n \sqrt{3 \frac{RT}{M}}. \quad (2^*)$$

Численные значения коэффициентов равны $\frac{1}{4} \sqrt{\frac{8}{\pi}} \approx 0,40$ в формуле (2); $\frac{1}{6} \sqrt{3} \approx 0,29$.

Поэтому в численных расчетах погрешность в 30% допустима.

2. Число вылетевших молекул можно найти, используя понятие насыщенного водяного пара. Если над поверхностью воды находится насыщенный водяной пар, то число молекул вылетающих с поверхности равно числу молекул, возвращающихся обратно. Число возвращающихся молекул равно числу молекул, ударяющихся о поверхность, умноженному на коэффициент η (доля молекул, задерживаемых водой). Поэтому, число вылетающих в единицу времени с единицы площади молекул равно

$$v_0 = \frac{1}{4} n \langle v \rangle \eta = \frac{1}{4} \eta n \sqrt{\frac{8 RT}{\pi M}} = \frac{1}{4} \eta \frac{p_n}{kT} \sqrt{\frac{8 RT}{\pi M}}, \quad (3)$$

где концентрация молекул насыщенного пара выражена из уравнения состояния $n = \frac{p_n}{kT}$.

Масса всех молекул, вылетевших с единицы площади за промежуток времени Δt равна

$$\Delta m = v_0 m \Delta t, \quad (4)$$

где $m = \frac{M}{R}$ - масса одной молекулы воды. С другой стороны эта же величина может быть выражена через объем испарившейся воды $\Delta m = \rho \Delta h$. Приравняв эти два выражения, найдем скорость высыхания

$$\frac{1}{4} \eta \frac{p_n}{kT} \sqrt{\frac{8 RT}{\pi M} \frac{M}{R}} \Delta t = \rho \Delta h \Rightarrow \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{1}{4} \eta \frac{p_n}{kT} \sqrt{\frac{8 RT}{\pi M} \frac{M}{R} \frac{1}{\rho}} = \eta \frac{p_n}{\rho} \sqrt{\frac{M}{2\pi RT}}. \quad (5)$$

Подстановка численных значений приводит к результату

$$\left(\frac{\Delta h}{\Delta t}\right)_0 = \eta \frac{p_n}{\rho} \sqrt{\frac{M}{2\pi RT}} = 0,04 \frac{2,3 \cdot 10^3}{1,0 \cdot 10^3} \sqrt{\frac{18 \cdot 10^{-3}}{2\pi \cdot 8,31 \cdot 293}} \approx 1,0 \cdot 10^{-4} \frac{м}{с} \approx 0,36 \frac{м}{час} \quad (6)$$

Как и было сказано в условии, оценка слишком завышена – трудно согласится с такой высокой скоростью испарения.

3. Так как над водой находится влажный воздух, то часть молекул воды, находящихся в воздухе, возвращается обратно в жидкость. Число этих молекул можно рассчитать по формуле (3), заменив в ней давление насыщенного пара на парциальное давление, которое равно $p = \varphi p_n$ (φ - относительная влажность воздуха). Таким образом, скорость испарения будет определяться разностью чисел молекул, вылетающих из жидкости и возвращающихся обратно. Иными словами, полученную оценку (6) следует умножить на $(1 - \varphi)$:

$$\left(\frac{\Delta h}{\Delta t}\right)_1 = \eta \frac{p_n}{\rho} \sqrt{\frac{M}{2\pi RT}} (1 - \varphi) \approx 0,30 \cdot 10^{-4} \frac{м}{с} \approx 0,11 \frac{м}{час}. \quad (6)$$

4. В стационарном состоянии диффузионный поток должен быть равен потоку частиц, покидающих поверхность воды.

4.1 Так как диффузионный поток пропорционален величине $\frac{\Delta n}{\Delta z}$ и постоянен по всей высоте сосуда, то концентрация молекул водяного пара должна убывать линейно с увеличением высоты над поверхностью сосуда. С учетом граничных условий, эта зависимость может быть записана в виде

$$n = n_0 - \frac{n_0 - n_1}{H} z. \quad (7)$$

Так как влажность воздуха при постоянной температуре пропорциональна концентрации, то аналогичное соотношение справедливо и для относительной влажности

$$\varphi(z) = \varphi_0 - \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{H} z. \quad (8)$$

где φ_1 - относительная влажность на высоте H

4.2 При заданных условиях диффузионный поток молекул воды определяется законом Фика, который приводит к выражению (с учетом $n = \frac{p_n}{kT} \varphi$)

$$q = DS \frac{p_n}{kT} \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{H} \quad (9)$$

4.3 С другой стороны этот же поток может быть выражен через число молекул воды вылетающих с поверхности жидкости

$$q = Sv_0(1 - \varphi_0), \quad (10)$$

где v_0 - величина, определяемая формулой (3).

Приравнявая эти потоки, получим

$$D \frac{p_n}{kT} \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{H} = v_0(1 - \varphi_0) \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\gamma\varphi_1 + 1}{\gamma + 1} \quad (11)$$

где обозначено $\frac{D}{Hv_0} \frac{p_n}{kT} = \gamma$.

Найдем также величину

$$(1 - \varphi_0) = 1 - \varphi_0 = 1 - \frac{\gamma\varphi_1 + 1}{\gamma + 1} = \frac{\gamma}{1 + \gamma}(1 - \varphi_1). \quad (12)$$

Так как скорость испарения пропорциональна $(1 - \varphi_0)$, то расчета скорости испарения необходимо предыдущую оценку (6) умножить на коэффициент $\frac{\gamma}{1 + \gamma}$. Рассчитаем

численное значение параметра

$$\gamma = \frac{D}{Hv_0} \frac{p_n}{kT} = \frac{4D}{H\eta \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{RT}{M}}} = \frac{4 \cdot 3,1 \cdot 10^{-5}}{0,1 \cdot 0,04 \sqrt{\frac{8 \cdot 8,31 \cdot 293}{\pi \cdot 18 \cdot 10^{-3}}}} \approx 5,3 \cdot 10^{-5}. \quad (13)$$

Так как этот параметр чрезвычайно мал, то им можно пренебречь в знаменателе выражения (12).

В этом случае скорость высыхания оказывается равной

$$\left(\frac{\Delta h}{\Delta t} \right)_2 = \gamma \eta \frac{p_n}{\rho} \sqrt{\frac{M}{2\pi RT}} (1 - \varphi_1) \approx 1,6 \cdot 10^{-9} \frac{M}{c} \approx 0,14 \frac{мм}{сутки}. \quad (14)$$

Итак, основной вывод из решения данной задачи – скорость высыхания определяется не скоростью выхода молекул из жидкости, а скоростью диффузии водяного пара в окружающую среду!

Заметим, что в данном случае скорость высыхания полностью определяется диффузионным потоком, а над поверхностью воды находится практически насыщенный пар. В этом прямая подстановка значения параметра γ в выражение для потока испаряющихся частиц дает

$$v = (1 - \varphi_0)v_0 = \gamma(1 - \varphi_1)v_0 = D \frac{n_{нас}}{H} (1 - \varphi_0). \quad (15)$$

Таким образом, этот поток равен диффузионному потоку, при условии, что над жидкостью находится насыщенный пар. С этой точки зрения можно провести и прямой расчет скорости высыхания

$$\begin{aligned} \frac{\Delta h}{\Delta t} &= D \frac{n_{нас}}{H} (1 - \varphi_0) \frac{M}{N_A} \frac{1}{\rho} = \frac{D}{H} \frac{p_n M}{RT} \frac{1}{\rho} (1 - \varphi_0) = \frac{3,1 \cdot 10^{-5} \cdot 2,3 \cdot 10^3 \cdot 18 \cdot 10^{-3}}{0,1 \cdot 8,31 \cdot 293 \cdot 1 \cdot 10^3} \cdot 0,3 \approx \\ &\approx 1,6 \cdot 10^{-9} \frac{M}{c} \approx 0,14 \frac{мм}{сутки} \end{aligned}$$