

**Задача 9-1. Знаете ли Вы закон Архимеда?**

1.1 Так как масса системы увеличилась в два раза, то во столько же раз увеличилась сила тяжести и уравновешивающая ее сила Архимеда. Поэтому  $F_1 = 2F_0$ .

1.2 Сумма сил (очевидно, векторная) давлений жидкости или газа на поверхность погруженного тела есть сила Архимеда. Так как объем шара увеличится в 8 раз, то и сила Архимеда, следовательно, и сила давления воздуха на шар увеличится в 8 раз.

1.3 Масса содержимого в сосуде увеличилась в 1,5 раза, во столько же раз возросла и сила тяжести. Сила тяжести уравновешивается силой давления на дно, которая пропорциональна высоте уровня жидкости в сосуде. Следовательно, уровень воды в сосуде возрастет в 1,5 раза:  $h_1 = 1,5h_0$ .

1.4 Давление жидкости на дно равно сумме давлений жидкости на верхнюю крышку  $P'_0$  и гидростатического давления  $p = \rho gh$ . Так как давление на крышку в 3 раза меньше давления на дно, то справедливо соотношение

$$P_0 = P'_0 + p = \frac{1}{3}P_0 + p, \quad (1)$$

из которого следует, что

$$P_0 = \frac{3}{2}p. \quad (2)$$

Такое же давление воздуха внутри пузырька. Так сжимаемостью жидкости можно пренебречь, то при всплытии пузырька ее объем, а, следовательно, и объем пузырька не изменятся. Воздух хорошо сжимаем, поэтому, если не изменился его объем, то не изменилось и давление внутри него. Поэтому после всплытия пузырька давление на крышку сосуда стало равным

$$P'_1 = P_0 = \frac{3}{2}p. \quad (3)$$

А давление на дно больше на гидростатическое давление, поэтому

$$P_1 = \frac{3}{2}p + p = \frac{5}{2}p. \quad (4)$$

Следовательно, отношение давлений

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{5}{3}. \quad (5)$$

1.5 В любом случае, когда стержень плавает, сила Архимеда уравновешивает силу тяжести. Так как сила тяжести не изменилась, то осталась неизменной и сила Архимеда. Это позволяет записать уравнение

$$\frac{2}{3}\rho_1 gV = \frac{1}{2}\rho_1 gV + \frac{1}{2}\rho_2 gV, \quad (6)$$

из которого следует, что

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1}{3}, \quad (7)$$

## Задача 9-2 Сравним амперы с ньютонами!

1. Для определения среднего расстояния  $r$  между центрами соседних ионов меди в решетке найдем их количество  $N$  в куске меди единичного объема

$$N = \frac{\gamma}{m_0}. \quad (1)$$

Тогда можно считать, что на один ион в среднем будет приходиться кубик объемом

$$V_0 = \frac{1}{N} = \frac{m_0}{\gamma} \quad (2)$$

Длина ребра такого кубика даст искомое расстояние между центрами соседних ионов меди в решетке

$$r = \sqrt[3]{V_0} = \sqrt[3]{\frac{m_0}{\gamma}} = \sqrt[3]{\frac{1,1 \cdot 10^{-25}}{8,96 \cdot 10^3}} \text{ (м)} = 2,3 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 2,3 \text{ \AA} \quad (3)$$

Для сравнения заметим, что размер (диаметр) атома водорода по порядку величины равен одному ангстрему  $\approx 1 \text{ \AA}$ .

2. Так каждый атом отдает один электрон, то концентрация электронов равна концентрации атомов, поэтому

$$n = \frac{\gamma}{m_0} = \frac{8,96 \cdot 10^3}{1,1 \cdot 10^{-25}} \text{ м}^{-3} = 8,1 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3} = 8,1 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3} \quad (4)$$

3. При протекании электрического тока через поперечное сечение проводника площадью  $S$  за промежуток времени  $\Delta t$  при средней скорости направленного движения свободных электронов  $u$  пройдет заряд

$$q = eN = enV = enSu \Delta t. \quad (5)$$

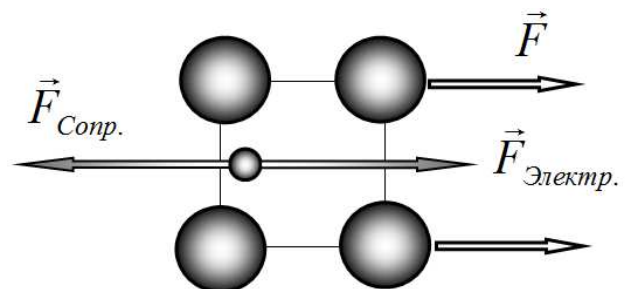
Согласно определению силы тока имеем

$$I = \frac{q}{\Delta t} = enSu \Rightarrow u = \frac{I}{enS} = \frac{1,0}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 8,1 \cdot 10^{28} \cdot 1,0 \cdot 10^{-6}} \frac{\text{м}}{\text{с}} = 7,7 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}}{\text{с}} \quad (6)$$

Как видим, скорость направленного движения свободных электронов при протекании тока весьма мала, что вполне понятно с учетом большого значения их концентрации.

4. Рисунок иллюстрирует общую схему расчета сил:

- не знаем, как рассчитать силу сопротивления, но знаем характеристику электрической силы (напряжение);
- так как средняя скорость электронов равна нулю, то средняя силы сопротивления равна по модулю силе электрической (2 закон Ньютона);
- по 3 закону Ньютона, сила, с которой решетка действует электроны, по модулю равна силе, с которой электроны действуют на решетку.



Для оценки средней силы  $F_0$ , действующей на электрон со стороны электрического поля, воспользуемся определением напряжения и запишем выражение для работы электрических сил на участке проводника длиной  $l$

$$A = eU = eIR = eI\rho \frac{l}{S}. \quad (7)$$

Такую же работу (но с противоположным знаком) совершает силы сопротивления

$$A = F_0 l \quad (8)$$

Сравнивая полученные выражения, найдем

$$F_0 = \frac{eI\rho}{S} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,0 \cdot 0,017 \cdot 10^{-6}}{1,0 \cdot 10^{-6}} = 2,7 \cdot 10^{-21} \text{ Н} \quad (9)$$

5. По третьему закону Ньютона сила, с которой решетка действует на электрон, по модулю равна силе, с которой электрон действует на решетку. Поэтому суммарная сила, действующая на кусок провода длиной со стороны электронов  $l$  равна произведению силы, действующей на один электрон, на число электронов в данном куске провода:

$$F = NF_0 = nVF_0 = nleI\rho = 8,1 \cdot 10^{28} \cdot 1,0 \cdot 10^{-2} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,0 \cdot 0,017 \cdot 10^{-6} = 2,2 \text{ Н} \quad (10)$$

Под действием такой силы участок провода приобрел бы ускорение

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F}{\gamma \beta l} = \frac{2,2}{8,96 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^{-2} \cdot 1 \cdot 10^{-6}} = 2,5 \cdot 10^4 \frac{\text{М}}{\text{с}^2} \quad (11)$$

Но эта сила никак не проявляется, потому, что стороны электрического поля такая же по модулю сила, но направленная в противоположную сторону, действует со стороны электрического поля на ионы кристаллической решетки.

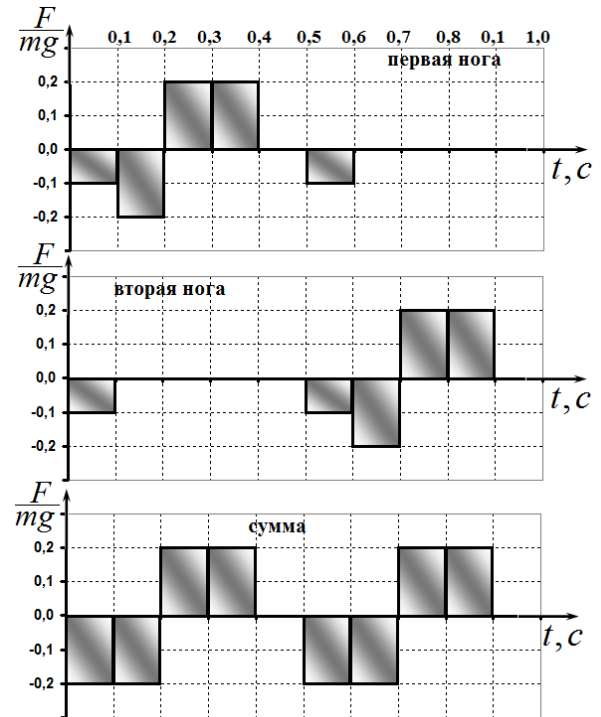
## Задача 9-3 Ходьба человека

### Часть 1. Продольная составляющая силы реакции.

1.1 Так как человек делает два шага в секунду, то касание второй ногой происходит ровно через 0,5 секунды. Значит, на участках от 0,1 до 0,2 секунд и от 0,5 до 0,6 человек касается поверхности обеими ногами. Для расчета горизонтального ускорения необходимо просуммировать силы, действующие на обе ноги. Для наглядности такое суммирование проведено в таблице 1 и на графиках.

Таблица 1. Суммарная горизонтальная сила.

Интервал (с)	$\frac{F_1}{mg}$ (1 нога)	$\frac{F_2}{mg}$ (2 нога)	$\frac{F_\Sigma}{mg}$ (сумма)
0,0-0,1	-0,1	-0,1	-0,2
0,1-0,2	-0,2	0	-0,2
0,2-0,3	0,2	0	0,2
0,3-0,4	0,2	0	0,2
0,4-0,5	0	0	0
0,5-0,6	-0,1	-0,1	-0,2
0,6-0,7	0	-0,2	-0,2
0,7-0,8	0	0,2	0,2
0,8-0,9	0	0,2	0,2
0,9-1,0	0	0	0



На каждом временном промежутке в 0,1 с суммарная сила постоянна, поэтому ускорение центра масс человека также постоянно. Оно рассчитывается по 2 закону Ньютона:

$$a = \frac{F_\Sigma}{m} \quad (1).$$

График зависимости горизонтального ускорения от времени показан на рис. 2.

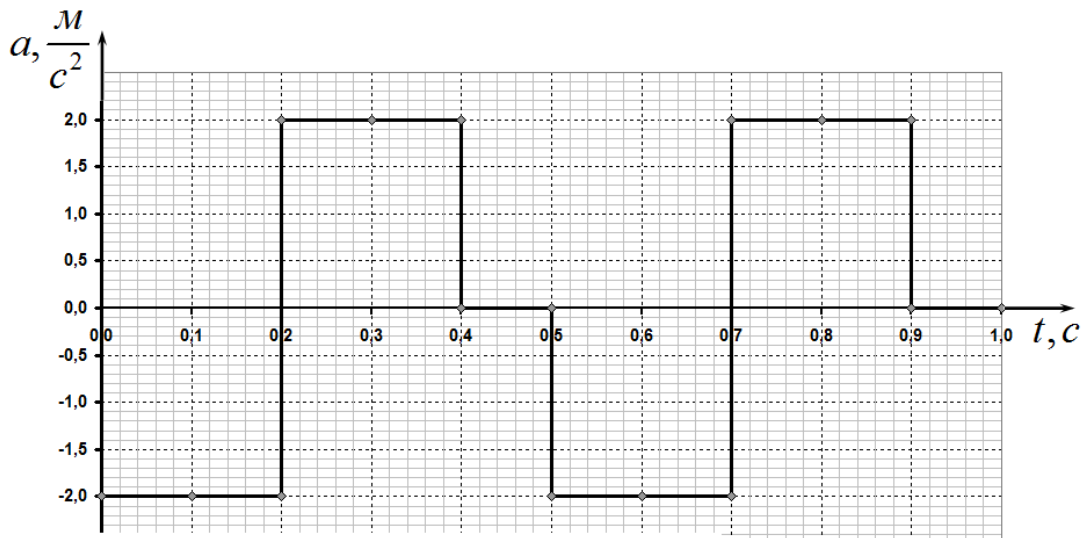


Рис. 2 Зависимость горизонтальной составляющей ускорения центра масс человека от времени.

Для расчета зависимости скорости от времени необходимо знать начальную скорость. Но нам известна только средняя скорость  $v_{cp}$  за один шаг. График зависимости ускорения от времени позволяет легко рассчитать зависимость изменения скорости  $\Delta v = v_i - v_0$ , где  $v_i$  - скорость в конце  $i$ -го интервала времени. Суммарное смещение центра масс за один шаг можно по формуле

$$S = \sum_i (v_0 + (\Delta v_i)_{cp} \Delta t) = v_0 T + \sum_i (\Delta v_i)_{cp} \Delta t, \quad (2)$$

где  $(\Delta v_i)_{cp}$  - средняя скорость на  $i$ -том интервале. Теперь среднюю скорость за полный шаг можно выразить как

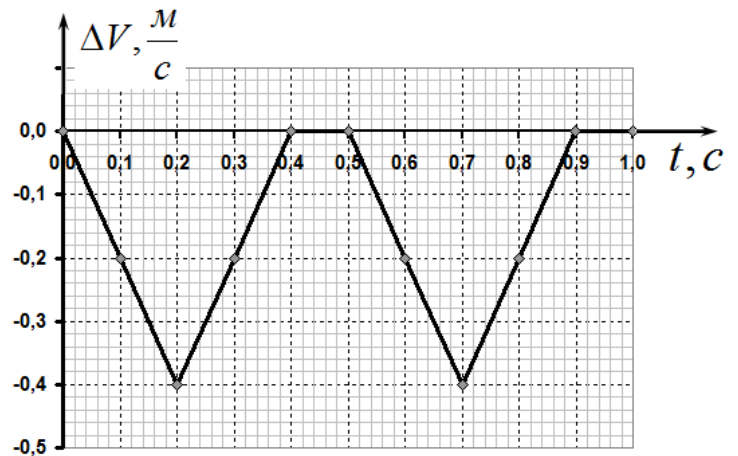
$$v_{cp} = \frac{S}{T} = v_0 + \frac{1}{T} \sum_i (\Delta v_i)_{cp} \Delta t. \quad (3)$$

Это соотношение позволяет найти начальную скорость  $v_0$ .

Результаты расчетов приведены в Таблице 2. На рисунке 3 построен график зависимости величины  $\Delta v$  от времени.

**Таблица 2. Расчет зависимости горизонтальной скорости от времени.**

$t, c$	$a, \frac{m}{c^2}$	$\Delta v, \frac{m}{c}$	$v, \frac{m}{c}$
0	4	0	-0,08
0,1	4	0,4	0,32
0,2	-2	0,2	0,12
0,3	-2	0	-0,08
0,4	-2	-0,2	-0,28
0,5	2	0	-0,08
0,6	4	0,4	0,32
0,7	-2	0,2	0,12
0,8	-2	0	-0,08
0,9	-2	-0,2	-0,28
1	2	0	-0,08



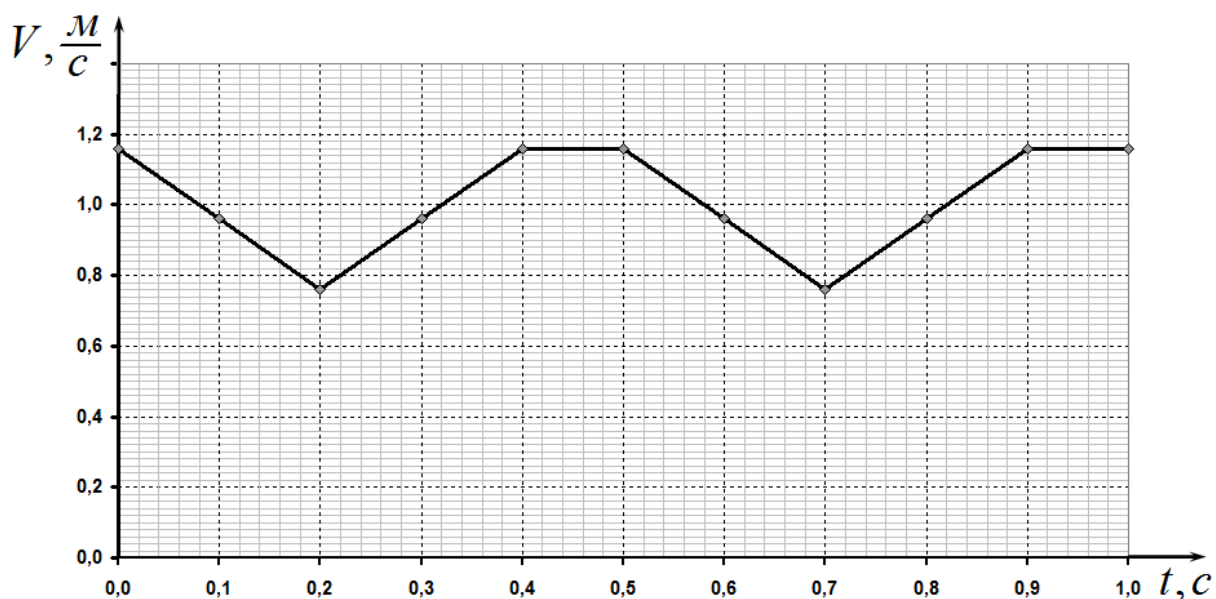
Очевидно, что сумма в выражении (2) численно равна площади под графиком зависимости  $\Delta v(t)$ . Эта площадь подсчитывается элементарно:

$$\sum_i (\Delta v_i)_{cp} \Delta t = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,4 \cdot 0,4 = -0,16 m.$$

Теперь из соотношения (3) определяем начальную скорость

$$v_0 = v_{cp} - \frac{1}{T} \sum_i (\Delta v_i)_{cp} \Delta t = 1,16 \frac{v}{c} \quad (4)$$

Эту скорость следует прибавить к значениям величин  $\Delta v(t)$ , в результате чего, получим искомую зависимость  $v(t)$ . График этой зависимости показан на рис. 4.



**Рис. 4** Зависимость горизонтальной составляющей скорости центра масс человека от времени.

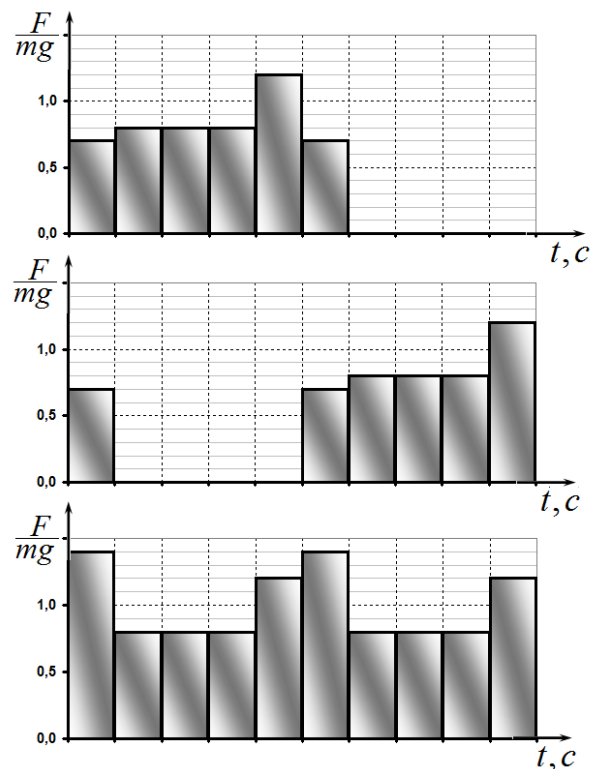
### Часть 2. Нормальная составляющая силы реакции.

Расчет зависимости вертикальной скорости центра масс от времени проводится полностью аналогично.

В Таблице 3 и на рисунках показана зависимость вертикальной составляющей силы от времени (с учетом суммирования в тех интервалах, где обе ноги находятся на земле).

**Таблица 3. Суммарная вертикальная сила.**

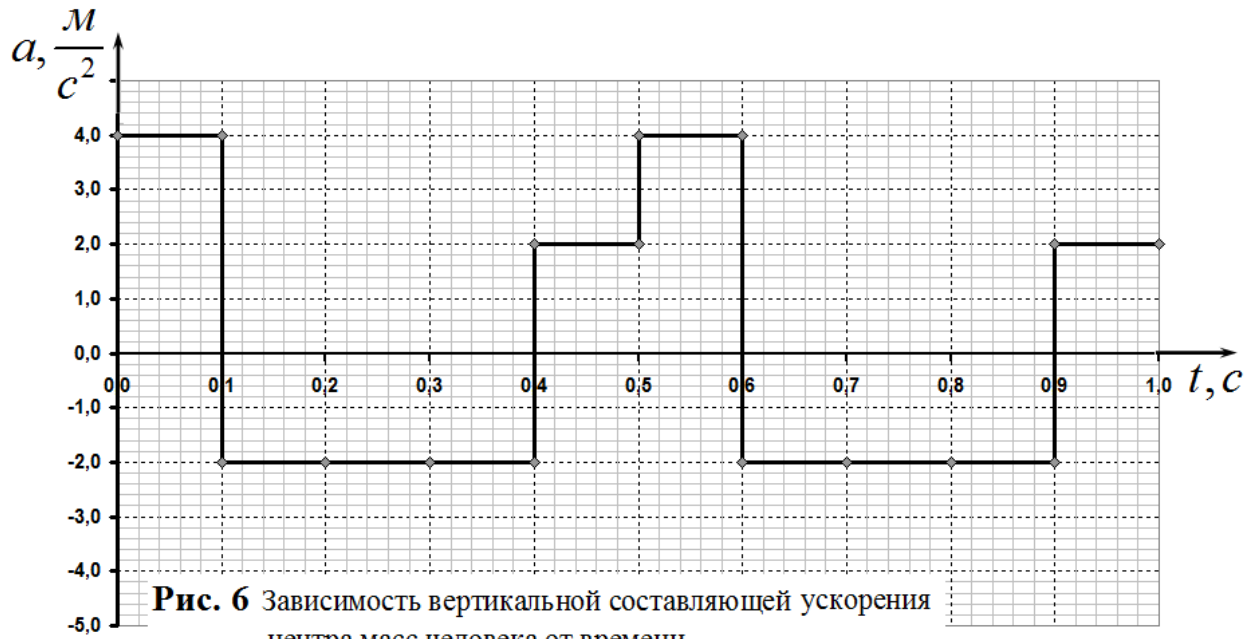
Интервал (с)	$\frac{F_1}{mg}$ (1 нога)	$\frac{F_2}{mg}$ (2 нога)	$\frac{F_{\Sigma}}{mg}$ (сумма)
0,0-0,1	0,7	0,7	1,4
0,1-0,2	0,8	0	0,8
0,2-0,3	0,8	0	0,8
0,3-0,4	0,8	0	0,8
0,4-0,5	1,2	0	1,2
0,5-0,6	0,7	0,7	1,4
0,6-0,7	0	0,8	0,8
0,7-0,8	0	0,8	0,8
0,8-0,9	0	0,8	0,8
0,9-1,0	0	1,2	1,2



Вертикальное ускорение центра масс рассчитывается по формуле

$$a = \left( \frac{F_{\Sigma}}{mg} - 1 \right) g \quad (5)$$

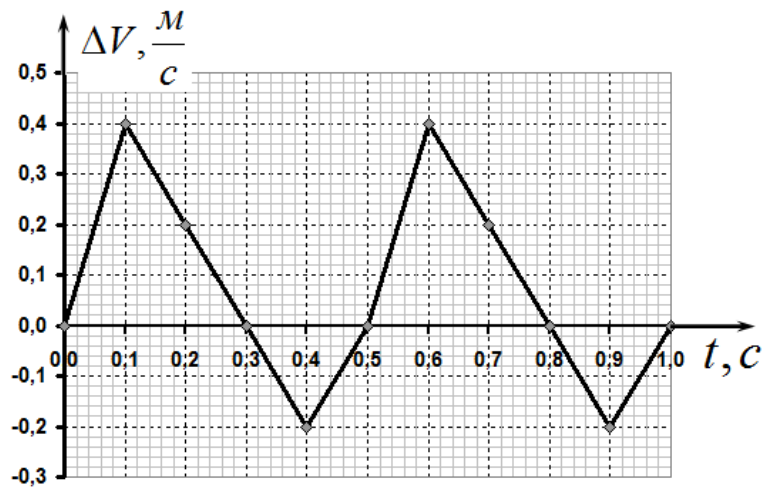
График этой зависимости приведен на рис. 6.



В Таблице 4 показаны результаты расчета изменения вертикальной скорости от времени, а на рис. 7 зависимость величины  $\Delta v$  от времени.

**Таблица 4.** Расчет зависимости горизонтальной скорости от времени.

$t, c$	$a, \frac{m}{c^2}$	$\Delta v, \frac{m}{c}$	$v, \frac{m}{c}$
0	4	0	-0,08
0,1	4	0,4	0,32
0,2	-2	0,2	0,12
0,3	-2	0	-0,08
0,4	-2	-0,2	-0,28
0,5	2	0	-0,08
0,6	4	0,4	0,32
0,7	-2	0,2	0,12
0,8	-2	0	-0,08
0,9	-2	-0,2	-0,28
1	2	0	-0,08



Расчет площади под графиком зависимости  $\Delta v(t)$  приводит к результату

$$\sum_i (\Delta v_i)_{cp} \Delta t = 2 \left( \frac{1}{2} 0,4 \cdot 0,3 - \frac{1}{2} 0,2 \cdot 0,2 \right) = 0,08 m.$$

Теперь из соотношения (3) определяем начальную скорость (с учетом, того, что средняя вертикальная скорость равна нулю):

$$v_0 = -\frac{1}{T} \sum_i (\Delta v_i)_{cp} \Delta t = -0,08 \frac{m}{c} \quad (4)$$

Эту скорость следует прибавить к значениям величин  $\Delta v(t)$ , в результате чего, получим искомую зависимость  $v(t)$ . График этой зависимости показан на рис. 8.



### Часть 3. Превращение энергии.

Кинетическая энергия тела равна

$$E_k = \frac{m}{2} (v_x^2 + v_y^2). \quad (5)$$

Используя данные расчетов скоростей, можно рассчитать кинетическую энергию тела в «узловых точках». Результаты этих расчетов приведены в Таблице 5. График полученной зависимости показан на рис. 9.

**Таблица 5.** Расчет зависимости кинетической энергии от времени.

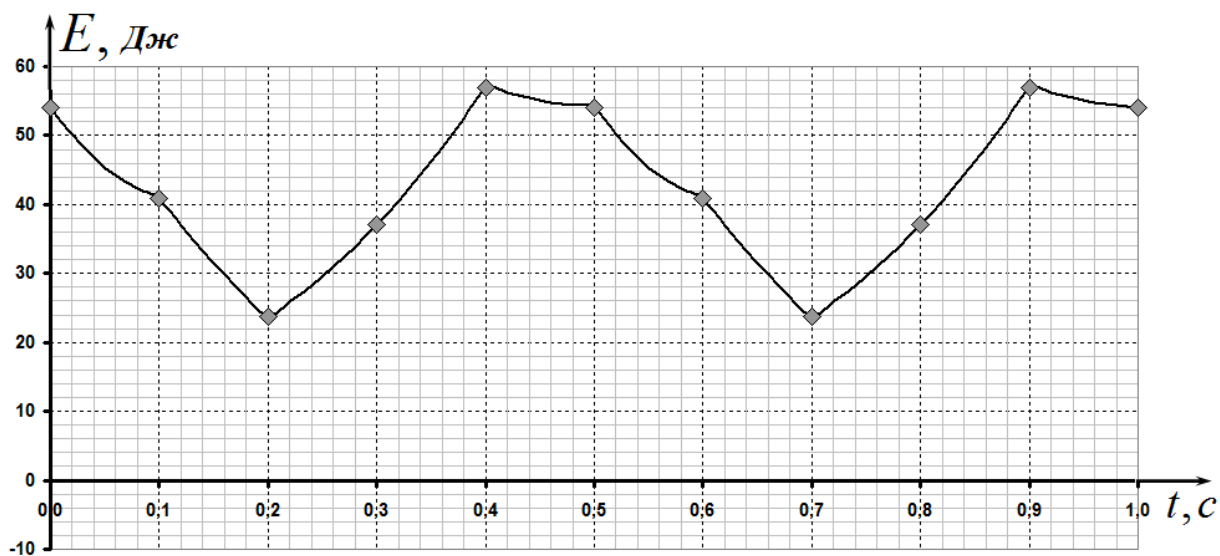
$t, c$	$v_x, \frac{m}{c}$	$v_y, \frac{m}{c}$	$E_k, дж$
0	1,16	-0,08	54,08
0,1	0,96	0,32	40,96
0,2	0,76	0,12	23,68
0,3	0,96	-0,08	37,12
0,4	1,16	-0,28	56,96
0,5	1,16	-0,08	54,08
0,6	0,96	0,32	40,96
0,7	0,76	0,12	23,68
0,8	0,96	-0,08	37,12
0,9	1,16	-0,28	56,96
1	1,16	-0,08	54,08

Для расчета потенциальной энергии ( $U = mgh$ ) необходимо построить график зависимости вертикальной координаты от времени. Так как на всех временных интервалах ускорение постоянно, то соответствующей зависимости будет состоять из отрезков парабол. Значения вертикальной координаты в «узловых точках» рассчитывается традиционным образом, как площадь под графиком зависимости  $v(t)$ . Результаты расчетов представлены в Таблице 6, график показан на рисунке 10.

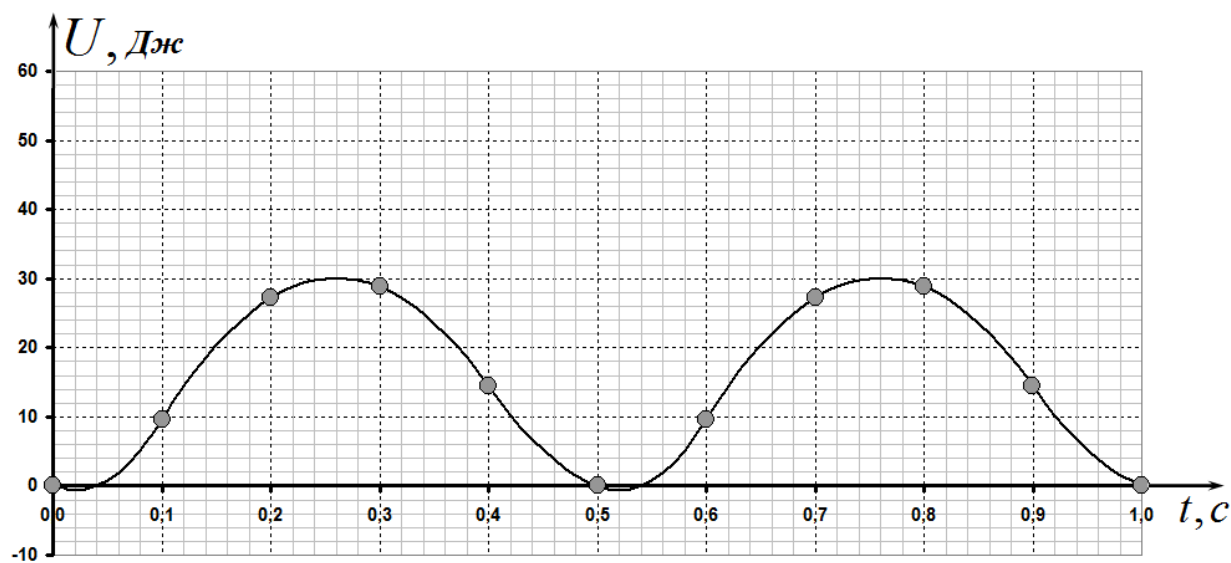


**Таблица 6. Расчет зависимости потенциальной энергии от времени.**

$t, c$	$v_y, \frac{m}{c}$	$h, m$	$U, Дж$
0	-0,08	0	0
0,1	0,32	0,012	9,6
0,2	0,12	0,034	27,2
0,3	-0,08	0,036	28,8
0,4	-0,28	0,018	14,4
0,5	-0,08	0	0
0,6	0,32	0,012	9,6
0,7	0,12	0,034	27,2
0,8	-0,08	0,036	28,8
0,9	-0,28	0,018	14,4
1	-0,08	0	0



**Рис. 9** Зависимость кинетической энергии от времени

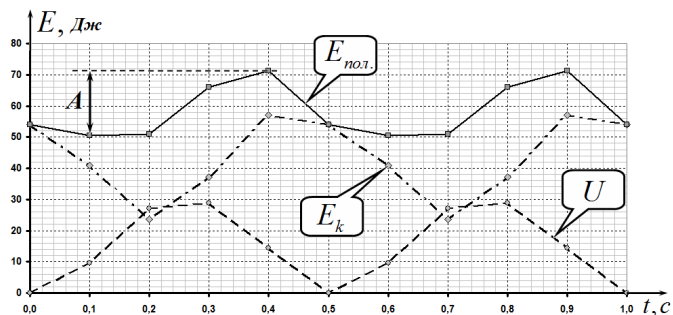


**Рис. 10** Зависимость потенциальной энергии от времени

Кинетическая энергия изменяется в пределах примерно от 24 Дж до 57 Дж, то есть, на 33 Дж. Потенциальная энергия изменяет от 0 до 29 Дж. Диапазоны изменения кинетической и потенциальной энергии примерно совпадают.

Дополнение (в решении не требуется).

Интересно оценить, какую мощность развивает человек при ходьбе. Для этого построим график зависимости полной энергии человека от времени. Человек совершает работу на тех интервалах, когда полная энергия растет. При убыли полной энергии эта энергия человеку не возвращается. На рисунке отмечен такой участок.



Простой расчет показывает, что средняя мощность, развиваемая человеком при ходьбе, примерно равна 30 Вт.

## Задача 10-1 Погреемся на солнышке?

### Часть 1. Почему черное теплее?

1.1 Рассчитаем коэффициент теплоотдачи в рамках заданной модели. За промежуток времени  $\Delta t$  на поверхность пластинки попадет количество молекул

$$N = \frac{1}{4} n \langle v \rangle S \Delta t = \frac{1}{4} n S \Delta t \sqrt{\frac{8RT_0}{\pi M}} \quad (1)$$

Где  $T_0$  — абсолютная температура воздуха. Поскольку «молекулы» воздуха двухатомные, то средняя энергия каждой подлетающей молекулы  $\langle E_1 \rangle = \frac{5}{2} kT_0$ , где  $k$  — постоянная Больцмана.

После контакта с пластинкой (согласно условию) каждая молекула увеличит свою энергию до среднего значения, соответствующего абсолютной температуре  $T$  пластинки  $\langle E_2 \rangle = \frac{5}{2} kT$ . Увеличение средней энергии каждой молекулы составит величину

$$\langle \Delta E \rangle = \frac{5}{2} k(T - T_0). \quad (2)$$

Следовательно, суммарное количество энергии, уносимой всеми молекулами от пластинки за промежуток времени  $\Delta t$  равно

$$\Delta E = N \langle \Delta E \rangle = \frac{1}{4} n S \Delta t \sqrt{\frac{8RT_0}{\pi M}} \cdot \frac{5}{2} k(T - T_0) = \frac{5}{8} kn S \Delta t \sqrt{\frac{8RT_0}{\pi M}} \cdot (T - T_0) = q S \Delta t. \quad (3)$$

Сравнивая выражение (4) с выражением (3) в условии, найдем значение коэффициента теплоотдачи в рамках данной модели

$$a = \frac{5}{8} kn \sqrt{\frac{8RT_0}{\pi M}}. \quad (4)$$

Выражая концентрацию молекул воздуха из уравнения Клапейрона-Менделеева  $n = \frac{P_0}{kT_0}$ ,

получим

$$a = \frac{5 P_0}{8 T_0} \sqrt{\frac{8RT_0}{\pi M}} = \frac{5}{8} P_0 \sqrt{\frac{8R}{\pi M T_0}} = 1,0 \cdot 10^5 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}. \quad (5)$$

1.2 Мощность солнечной энергии, попадающей на единицу площади пластинки, постоянна и равна  $q_0$ . Мощность потока теплоты с единицы площади пластинки определяется формулой

$$q_1 = at_1, \quad (6)$$

здесь  $t_1 = T_1 - T_0$  - разность между температурой поверхности пластинки и температурой воздуха.

По мере увеличения температуры пластинки будет увеличиваться количество энергии, уносимой «горячими» молекулами от нее. Следовательно, при некоторой температуре количество теплоты, попадающее в систему, будет равно количеству теплоты, уносимому из нее. Далее температура пластинки перестанет меняться. Если пластинка нормально освещается солнечным светом на воздухе при указанных условиях, то для абсолютно черной поверхности (коэффициент поглощения равен единице  $\eta_1 = 1,0$ ), то баланс потоков теплоты выражается уравнением

$$q_0 = q_1 \Rightarrow q_0 = at_1, \quad (7)$$

из которого находим, насколько поверхность пластинки теплее воздуха

$$t_1 = \frac{q_0}{a} = 1,4 \cdot 10^{-2} \text{ К}. \quad (8)$$

Если поверхность пластинки белая (коэффициент поглощения равен  $\eta_2 = 0,2$ ), то она нагреется еще меньше

$$q_0 = q_1 \Rightarrow \eta q_0 = at_1 \Rightarrow t_2 = \frac{\eta_2 \cdot q_0}{a} = 2,8 \cdot 10^{-3} \text{ К} \quad (9)$$

Наш повседневный опыт свидетельствует, что нагрев поверхностей солнечным светом может быть значительно выше.

## Часть 2. Почему в тени холоднее?

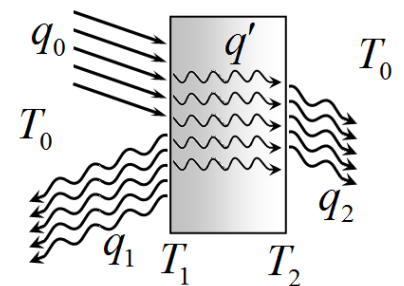
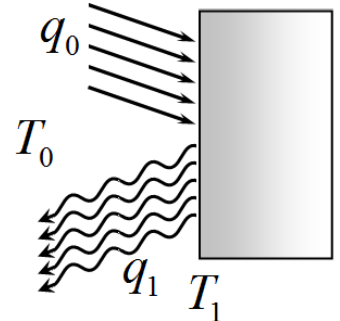
2.1 Если вторая сторона пластинки не теплоизолирована, то часть энергии солнечного потока  $q_0$  будет отводиться через переднюю  $q_1$  и заднюю  $q_2$  поверхности пластинки. В установившемся режиме баланс потоков теплоты выражается уравнениями

$$q_0 = q_1 + q_2 = at_1 + at_2. \quad (10)$$

Кроме того, поток с теневой стороны пластинки равен потоку теплоты внутри пластинки

$$q_2 = q' \Rightarrow at_2 = \frac{\alpha}{h}(t_1 - t_2). \quad (11)$$

Запишем получившуюся систему уравнений в виде



$$q_0 = at_1 + at_2$$

$$\frac{\alpha}{h}(t_1 - t_2) = at_2$$

Умножим второе уравнение на 2 и вычтем его из первого, в результате получим

$$q_0 - 2\frac{\alpha}{h}(t_1 - t_2) = a(t_1 - t_2) \Rightarrow t_1 - t_2 = \frac{q_0}{a} \frac{1}{1 + 2\frac{\alpha}{ha}} \quad (12)$$

Параметр  $\gamma = \frac{\alpha}{ha} = \frac{46}{2,0 \cdot 10^{-2} \cdot 1,0 \cdot 10^5} = 0,023$ , имеющий смысл отношений коэффициентов

теплопередачи через пластику и теплоотдачи, мал. То есть процессы теплоотдачи в окружающую среду преобладают над теплопереносом через пластинку. При этом значении параметра  $\gamma$  разность температур между сторонами пластинки равна

$$t_1 - t_2 = \frac{q_0}{a} \frac{1}{1 + 2\gamma} = \frac{1,4 \cdot 10^3}{1,0 \cdot 10^5} \frac{1}{1 + 2 \cdot 0,023} = 1,34 \cdot 10^{-2} \text{ K} \quad (13)$$

Вычислим также значения разностей температур обеих сторон пластинки:

$$\frac{\alpha}{h}(t_1 - t_2) = at_2 \Rightarrow t_2 = \frac{\alpha}{ah}(t_1 - t_2) = \frac{q_0}{a} \frac{\gamma}{1 + 2\gamma} = 3,1 \cdot 10^{-4} \text{ K}$$

$$t_1 - t_2 = \frac{q_0}{a} \frac{1}{1 + 2\gamma} \Rightarrow t_1 = t_2 + \frac{q_0}{a} \frac{1}{1 + 2\gamma} = \frac{q_0}{a} \frac{1 + \gamma}{1 + 2\gamma} = 1,37 \cdot 10^{-2} \text{ K}$$

Температура освещенной стороны практически совпадает с температурой теплоизолированной пластинки. Температура неосвещенной стороны практически равна температуре окружающей среды. Если бы теплопроводность пластинки была велика ( $\gamma \gg 1$ ), то температуры обеих сторон были бы одинаковы и два раза меньше температуры теплоизолированной пластинки.

И в этом случае результаты расчетов оказываются сильно занижены по сравнению с реальностью.

### Часть 3. Почему мокрое холоднее?

Если поверхность пластинки влажная, то теплота уносится из-за испарения воды.

Для оценки мощности этого потока теплоты можно воспользоваться следующими рассуждениями. Если над поверхностью воды находится насыщенный водяной пар, то количество молекул воды, вылетающих с поверхности, равно числу молекул, попадающих на поверхность и задерживаемых ею. Это число рассчитывается по формуле

$$\nu_- = \frac{1}{4} n \sqrt{\frac{8RT_0}{\pi M}} \cdot \eta = \frac{1}{4} \eta \frac{P_{нас.}}{kT_0} \sqrt{\frac{8RT_0}{\pi M}} \quad (14)$$

здесь  $n = \frac{P_{нас.}}{kT_0}$  концентрация молекул воды насыщенного пара.

Это число не зависит от того, какой газ находится над поверхностью воды. Если над поверхностью находится воздух, влажность которого равна  $\varphi$ , то число молекул, возвращающихся в воду равно

$$v_+ = \frac{1}{4} \eta \varphi \frac{P_{нас.}}{kT_0} \sqrt{\frac{8RT_0}{\pi M}}. \quad (15)$$

Скорость испарения (в числах молекул) определяется как разность между найденными потоками

$$v = v_- - v_+ = \frac{1}{4} \eta (1 - \varphi) \frac{P_{нас.}}{kT_0} \sqrt{\frac{8RT_0}{\pi M}} \quad (16)$$

Поток теплоты, уносимой вследствие испарения, рассчитывается по формуле

$$\begin{aligned} q_{исп.} &= L \frac{\Delta m}{\Delta t} = L m_0 v = \frac{1}{4} L m_0 \eta (1 - \varphi) \frac{P_{нас.}}{kT_0} \sqrt{\frac{8RT_0}{\pi M}} = \\ &= \frac{1}{4} L \eta (1 - \varphi) \frac{P_{нас.} M}{RT_0} \sqrt{\frac{8RT_0}{\pi M}} = \frac{1}{4} L \eta (1 - \varphi) P_{нас.} \sqrt{\frac{8M}{\pi RT_0}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Подстановка численных значений приводит к следующему результату для потока теплоты, уносимого испаряющейся водой

$$\begin{aligned} q_{исп.} &= \frac{1}{4} L \eta (1 - \varphi) P_{нас.} \sqrt{\frac{8M}{\pi RT_0}} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2,47 \cdot 10^6 \cdot 0,04 \cdot 0,4 \cdot 1,3 \cdot 10^3 \sqrt{\frac{8 \cdot 18 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 8,31 \cdot 293}} \approx 5,6 \cdot 10^4 \frac{Bm}{m^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

3.2 Баланс потоков теплоты при наличии испарения выражается уравнением

$$q_0 = q_{исп.} + a \Delta T, \quad (19)$$

из которого следует оценка для температуры пластинки

$$t = t_0 + \frac{q_0 - q_{исп.}}{a} = 9,4^\circ C. \quad (20)$$

В этом случае температура пластинки оказывается меньше температуры окружающего воздуха.

#### Часть 4.

Основная причина некоторой несуразности полученных результатов заключается в сильно завышенном значении коэффициента теплоотдачи. В реальности эти процессы идут гораздо медленнее, так как близи поверхности образуется поверхностный слой, температура которого плавно изменяется от температуры пластинки до температуры окружающего воздуха, теплопередача в котором определяется более медленным процессом теплопроводности воздуха.

Аналогично, при расчете скорости испарения необходимо учитывать более медленный процесс диффузии молекул воды в том же приповерхностном слое.

Полученные результаты описывают ситуацию при очень сильном ветре. На самом деле, чтобы весной погреться на солнышке мы ищем освещенное место, защищенное от ветра!

## Задача 10-2 Мы мирные люди...

### Часть 1. Знакомство с новой системой единиц измерения.

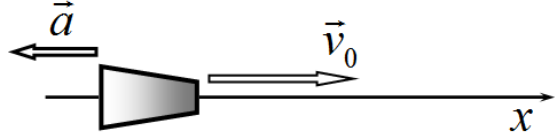
1.1 – 1.2 Единицами измерения длины и ускорения являются

$$l_0 = uT$$

$$a_0 = \frac{u}{T} \quad (1)$$

Отметим, что в этой системе единиц ускорение корабля всегда по модулю равно 1.

1.3 В традиционной системе единиц закон движения корабля имеет вид

$$x = 2ut - \frac{a_0 t^2}{2} \quad (2)$$


Чтобы перейти в собственную систему единиц, следует проделать замены (штрихами обозначены величины, измеренные в новой системе единиц):

$$t = T \cdot t', \quad x = l_0 x' = uT x', \quad (3)$$

которые приводят к выражению

$$uT x' = 2u \cdot T t' - \frac{1}{2} \frac{u}{T} (T t')^2,$$

В котором все параметры сокращаются (штрихи опущены за ненадобностью):

$$x = 2t - \frac{t^2}{2} \quad (4)$$

### Часть 2. Открытый космос.

2.1 В этом пункте в последний раз используем обычную систему единиц измерения.

Очевидно, что максимальную скорость будут иметь те частицы шлейфа, которые испущены в начальный момент времени, и эта скорость равна  $v_0 = 2u + u = 3u$ . Скорости частиц, выпущенных позднее, будут меньше, так как ракета тормозит. Следовательно, на максимальное расстояние улетят частицы, испущенные в начальный момент времени. Из закона движения (2) следует, что время, через которое ракета вернется в начальное состояние равно

$$t_k = \frac{4u}{a_0} = 4T. \quad (5)$$

Поэтому максимальное удаление частиц шлейфа к моменту возвращения ракеты равно

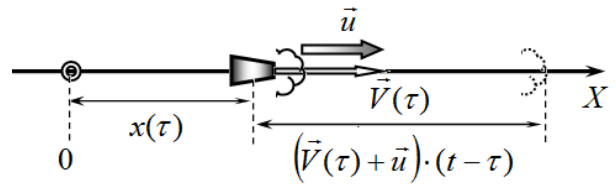
$$x_{\max} = 3u \cdot 4T = 12uT. \quad (6)$$

В собственной системе единиц:  $x_{\max} = 12$ .

Для того, чтобы найти минимальную координаты частиц шлейфа, рассмотрим положение частиц дыма, испущенных на обратном пути ракеты. Так как направление вылета частиц противоположно скорости ракеты, то они никогда не смогут догнать ракету. Следовательно, минимальная координата частиц шлейфа равна минимальной координате ракеты, т.е.  $x_{\min} = 0$  (в любой системе единиц). Таким образом, общая длина шлейфа к моменту возвращения ракеты равна  $L = 12uT$ .

2.2 Здесь и далее используем собственную систему единиц. Напоминаем, в этой системе ускорение ракеты  $a_0 = 1$ , скорость вылета частиц дыма  $u = 1$ .

Функцию  $X(t, \tau)$  - координата частицы дыма в момент времени  $t$ , если эта частица была выпущена в момент времени  $\tau$ , строится простым способом. Пусть закон движения ракеты задан функцией  $x(t)$ .



Тогда частица дыма, испущенная в момент времени  $\tau$  (в этот момент ее координата  $x(\tau)$ ), за оставшееся время  $(t - \tau)$  ее координата изменится на величину равную

$$\Delta x = (v(\tau) + 1)(t - \tau), \quad (7)$$

где  $v(\tau)$  - скорость ракеты в момент времени  $\tau$ . Таким образом, искомая функция имеет вид

$$X(t, \tau) = x(\tau) + (v(\tau) + 1)(t - \tau). \quad (8)$$

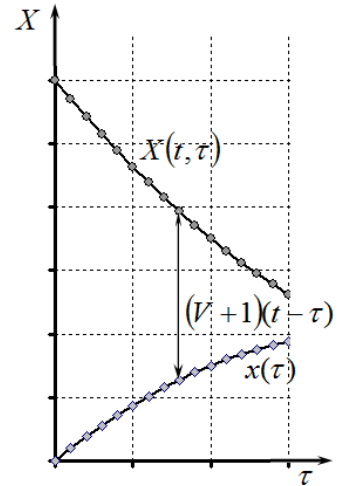
Очевидно, что имеет смысл рассматривать эту функцию только при  $\tau \leq t$ . Рисунок еще раз иллюстрирует процедуру построения данной функции.

В рассматриваемом случае, когда закон движения описывается функцией (4),  $v(\tau) = 2 - \tau$ , поэтому

$$X(t, \tau) = 2\tau - \frac{\tau^2}{2} + (3 - \tau)(t - \tau). \quad (9)$$

Удобно в этой функции выделить полный квадрат:

$$X(t, \tau) = \frac{1}{2}(t + 1 - \tau)^2 - \frac{(t - 2)^2 - 3}{2}. \quad (10)$$



2.3 Построенная функция  $X(t, \tau)$  позволяет находить распределение концентрации частиц в шлейфе. Действительно: в малом слое шлейфа толщиной  $\Delta X$  окажутся частицы, испущенные в соответствующем интервале  $\Delta \tau$ . Их масса равна  $\Delta m = \mu \Delta \tau$ , где  $\mu$  - масса частиц, испускаемых дымовой пушкой в единицу времени. Поэтому концентрация частиц в слое

$$c = \frac{\Delta m}{S \Delta X} = \frac{\mu \Delta \tau}{S \Delta X}, \quad (11)$$

где  $S$  - площадь поперечного сечения шлейфа.

При неподвижной дымовой пушке, частицы, испущенные за время  $\Delta t$ , окажутся в слое толщиной  $u \Delta t$ , поэтому их концентрация определяется формулой:

$$c_0 = \frac{\mu \Delta t}{S u \Delta t} = \frac{\mu}{S u}. \quad (12)$$

Наконец, разделим равенство (11) на равенство (12), в результате чего получим (кроме того, в общем случае следует взять модули интервалов - нам важны только длины отрезков)

$$c = c_0 \frac{u}{\left| \frac{\Delta X}{\Delta \tau} \right|}. \quad (13)$$

В собственной системе единиц имеет смысл выбрать в качестве единицы концентраций использовать  $c_0$  (или, что равносильно, положить  $c_0 = 1$ ). Тогда концентрация частиц в дымовом следе выражается очень просто:

$$c = \left| \frac{\Delta X}{\Delta \tau} \right|^{-1}. \quad (14)$$

Правда, эта формула определяет концентрацию, как функцию  $\tau$ . Чтобы перейти к зависимости  $c(X)$  можно использовать один и возможных путей:

- выразить  $\tau$  через  $X$  из функции  $X(t, \tau)$  и подставить в формулу (14);
- найти обратную функцию к  $X(t, \tau)$  -  $\tau(X)$  и вычислить ее производную;
- рассматривать выражения (14) и функцию  $X(t, \tau)$  как пару функций, определяющих концентрацию  $c(X)$  параметрически (где в качестве параметра выступает  $\tau$ ).

Отметим, что все эти способы пригодны, если функция  $X(t, \tau)$  является монотонной, когда существует обратная к ней функция. В противном случае, необходим дополнительный анализ.

**2.4 – 2.5** Для построения схематического графика функции  $X(t, \tau)$  можно воспользоваться следующей процедурой:

- построить график функции  $x(\tau)$ : банальная парабола, ветви вниз, нули при  $t = 0$  и  $t = 4$ , максимум при  $t = 2$ , при этом  $x = 2$ ;
- функция  $X(t, \tau)$  также парабола, ветви вверх, экстремум вне рассматриваемого интервала ( в точке  $\tau = t = 1$ ), при  $\tau = 0$   $X = 3t$ , при  $\tau = t$   $X = x(t)$ ;
- можно «найти» еще одну точку: при  $\tau = 3$  скорость частиц дыма равна нулю. Поэтому в этой точке тоже  $X = x(t)$ .

Используя вид функции (10), не сложно найти

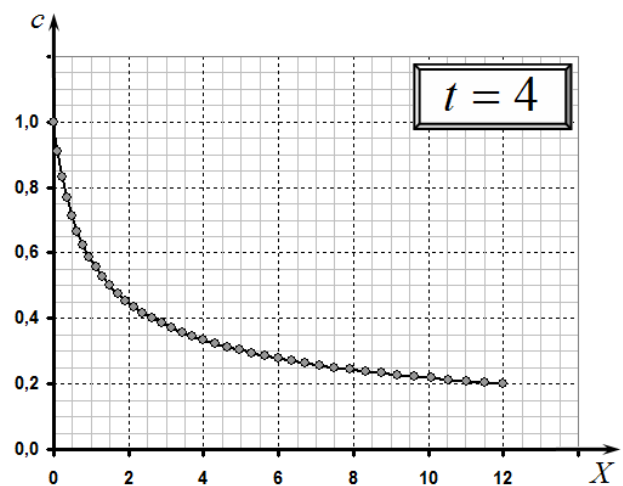
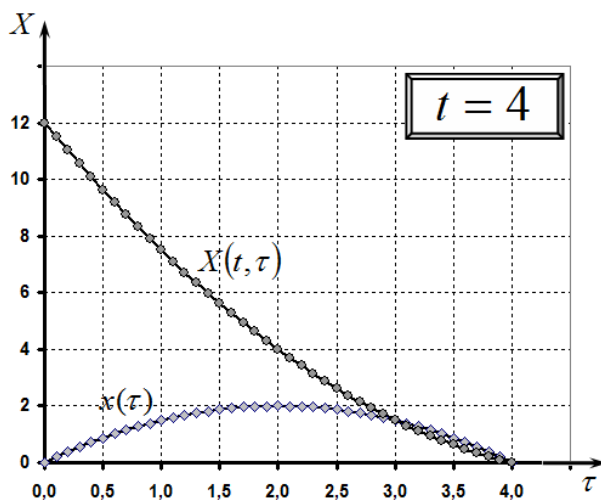
$$\frac{\Delta X}{\Delta \tau} = t + 1 - \tau. \quad (15)$$

Для построения зависимости концентрации от координаты следует учесть следующее:

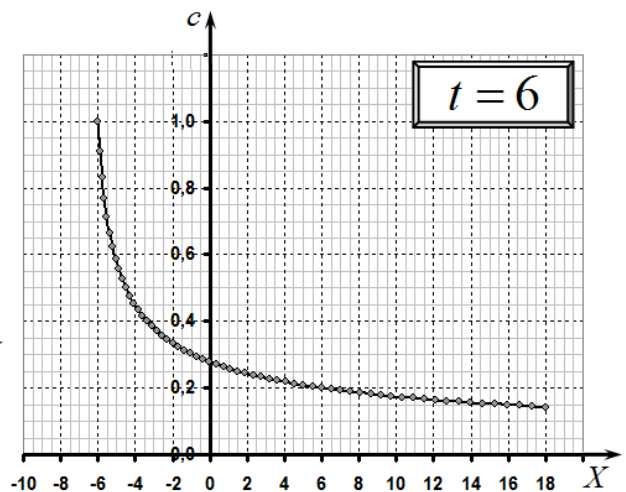
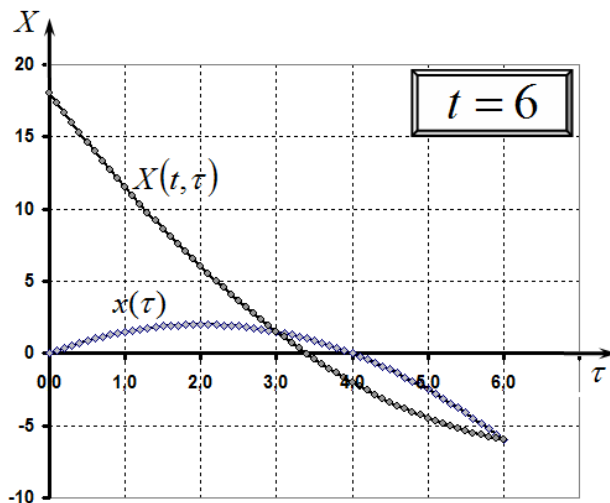
- пределы изменения аргумента в пределах изменения функции  $X(t, \tau)$ ;
- функция монотонно убывающая, выпуклостью вниз;
- при  $X = X_{\max}$  (т.е. при  $\tau = 0$ ), как следует из формулы (15)  $c = \frac{1}{t+1}$ ;
- при  $X = x(\tau)$  (при  $\tau = t$ )  $c = 1$ .

Можно также подсчитать значения и в некоторых промежуточных точках.

Графики этих функций показаны на рисунках.







**2.6** Первые шаги решения этой части задачи аналогичны рассмотренным ранее.

Для построения функции  $X(t, \tau)$  необходимо учесть, что вектор скорости вылетающего дыма направлен в противоположную сторону, поэтому следует записать

$$X(t, \tau) = x(\tau) + (v(\tau) - 1)(t - \tau). \quad (16)$$

При законе движения (4) эта функция задается формулой

$$X(t, \tau) = 2\tau - \frac{\tau^2}{2} + (1 - \tau)(t - \tau). \quad (17)$$

Выделяя полный квадрат, получим

$$X(t, \tau) = \frac{1}{2}(t - 1 - \tau)^2 - \frac{(t - 2)^2 - 3}{2}. \quad (18)$$

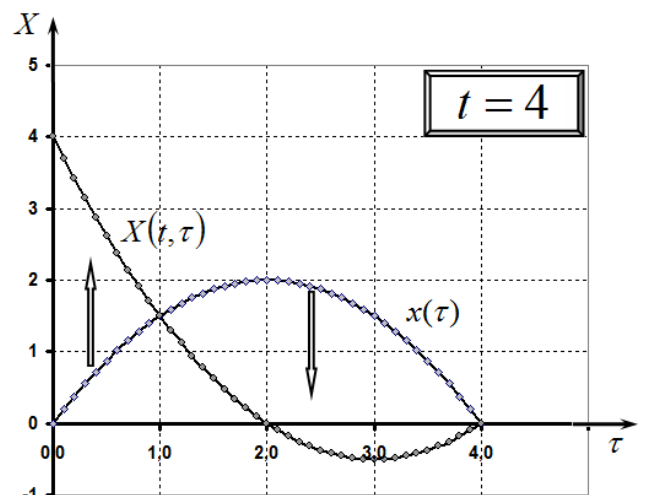
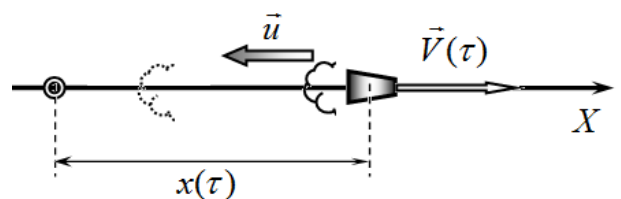
На интересуют эта функция при  $t = 4$ .

График этой функции также является параболой, только с одной существенной особенностью: ее минимум попадает внутрь рассматриваемого интервала  $\tau \leq t$ !

Для построения графика этой функции можно использовать следующие точки:

- при  $\tau = 0$   $X = t = 4$ ;
- при  $\tau = t = 4$   $X = x(t) = 0$ ;
- вершина параболы:  $\tau = 3$ ,  $X = -0,5$ .

Скорость вылетающих частиц зависит от времени по закону  $v - u = 1 - \tau$ . Поэтому при  $\tau = 1$  эта скорость равна нулю (частицы, вылетевшие в этот момент, покоятся) поэтому  $X(t, 1) = x(1)$ .



Для наглядности, на рисунке указаны стрелки, указывающие направление, в котором движется шлейф после запуска. Так при  $\tau < 1$  скорость ракеты больше скорости запуска частиц дыма, поэтому шлейф следует за ракетой, отставая от нее. При  $\tau > 1$  частицы шлейфа движутся в отрицательном направлении выбранной оси.

Рисунок показывает, что при  $X > 0$  координата однозначно определяется временем испускания. В этой области для расчета распределения концентрации частиц в шлейфе можно использовать процедуру, рассмотренную ранее. Здесь (при  $X > 0$  или  $0 < \tau < 2$ ) концентрация определяется формулой:

$$c = \left| \frac{\Delta X}{\Delta \tau} \right|^{-1} = \frac{1}{|t-1-\tau|} = \frac{1}{3-\tau} \quad (19)$$

В области  $X > 0$  одному значению  $X$  соответствует два значения  $\tau$ .

Рассмотрим эту область подробнее. Во-первых, одному малому интервалу  $\Delta X_1$  соответствует два малых интервала  $\Delta \tau_1$  и  $\Delta \tau_2$ . Физический смысл этой двужначности следующий: в рассматриваемый момент времени в эту полосу  $\Delta X_1$  попадают частицы, испущенные в два интервала времени  $\Delta \tau_1$  и  $\Delta \tau_2$ . Поэтому для расчета концентрации частиц внутри этой полосы необходимо просуммировать обе порции частиц. Легко видеть, что обе эти порции создают одинаковую концентрацию, поэтому в этом интервале концентрацию следует удвоить (при  $X < 0$  или  $2 < \tau < 3$ ):

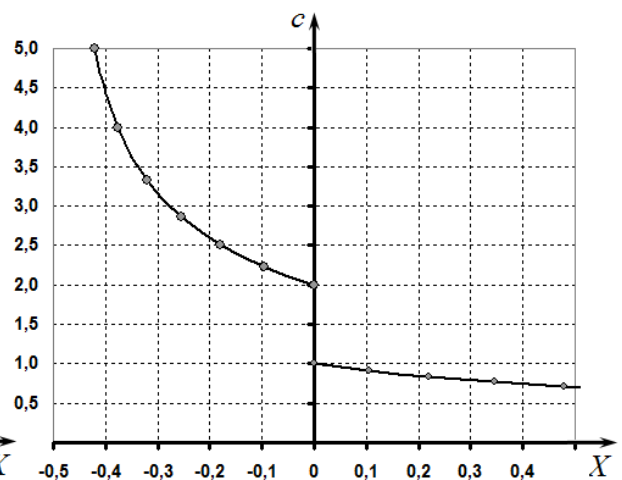
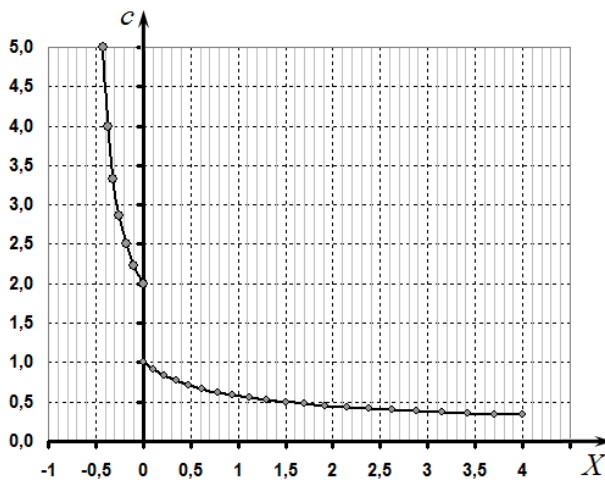
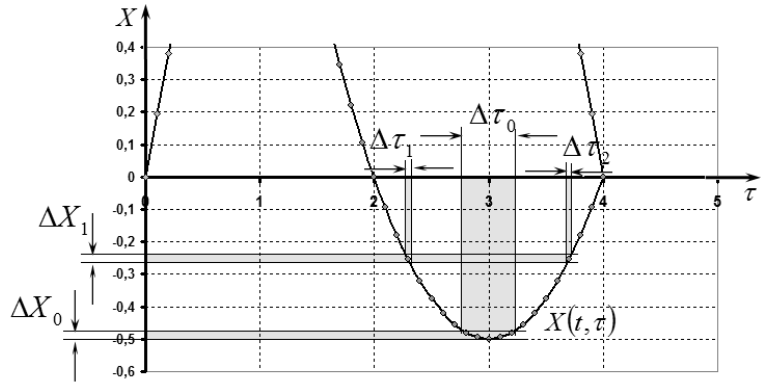
$$c = \frac{2}{3-\tau} \quad (20)$$

Наконец, при  $X = -0,5$  (или при  $\tau = 3$ ) концентрация формально стремится к бесконечности. Рисунок поясняет этот вывод: малому интервалу  $\Delta X_0$  соответствует

гораздо больший интервал  $\Delta \tau_0$ . Формально в этой точке  $\frac{\Delta X}{\Delta \tau} = 0$ . Физический смысл

этого парадоксального, на первый взгляд, результата понятен: в этот слой попадают частицы, испущенные в течение достаточно длительного промежутка времени.

График зависимости концентрации от координаты показан на рисунке. Также показан этот же график вблизи  $X = 0$  в увеличенном масштабе.



### Часть 3. На новой планете.

Эта часть является двумерным развитием одномерной задачи предыдущей части. Необходимо найти координаты частицы в момент времени  $t$ , если она была испущена в момент времени  $\tau$ .

Процедура такого построения аналогична той, которую мы использовали в предыдущей части. Так как ракета движется равномерно с постоянной скоростью  $2u$ , то закон ее движения имеет вид

$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos 45^\circ \cdot t = \sqrt{2}t \\ y(t) = 2 \cos 45^\circ \cdot t = \sqrt{2}t \end{cases} \quad (21)$$

После того, как частицы испущены (со скоростью  $u$ ) далее они движутся с постоянным ускорением равным  $\frac{a_0}{2}$ , направленным вниз. В собственной системе единиц координаты частиц, испущенных в момент времени  $\tau$ , в момент  $t$  будут равны:

$$\begin{cases} X(t, \tau) = \sqrt{2} \tau + \sqrt{2} \left(1 \pm \frac{1}{2}\right) \cdot (t - \tau) \\ Y(t, \tau) = \sqrt{2} \tau + \sqrt{2} \left(1 \pm \frac{1}{2}\right) \cdot (t - \tau) - \frac{(t - \tau)^2}{4} \end{cases} \quad (21)$$

Знак «плюс» соответствуют частицам, испущенным по направлению движения ракеты, знак «минус», частицам, испущенным в противоположном направлении.

В данном случае можно получить явное выражение для функции, описывающей шлейф дыма. Для этого в уравнениях (21) следует избавиться от  $\tau$ . Заметим, что

$$Y = X - \frac{(t - \tau)^2}{2}. \quad (22)$$

Поэтому достаточно из первого уравнения получить выражение для  $(t - \tau)$ . Прделаем эту процедуру.

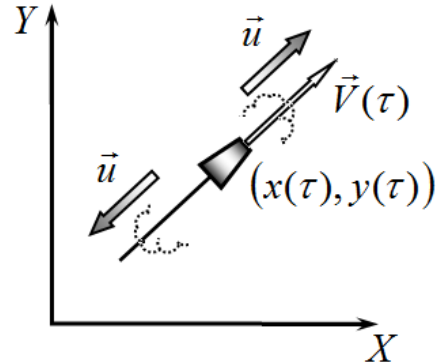
$$\begin{aligned} X(t, \tau) &= \sqrt{2} \tau + \sqrt{2} \left(1 \pm \frac{1}{2}\right) \cdot (t - \tau) \Rightarrow \\ \frac{X}{\sqrt{2}} &= -(t - \tau) + t + \left(1 \pm \frac{1}{2}\right) \cdot (t - \tau) = t \pm \frac{1}{2}(t - \tau) \Rightarrow \\ (t - \tau) &= \mp \left( \frac{X}{\sqrt{2}} - t \right) \end{aligned}$$

Полученное выражение подставляем в формулу (22) и сразу подставим требуемое значение  $t = 3$

$$Y = X - \frac{1}{2} \left( \frac{X}{\sqrt{2}} - 3 \right)^2. \quad (23)$$

поразительно, но оба шлейфа описываются одной функцией! Но они отличаются диапазонами изменения аргумента. Далее найдем, в каких пределах изменяются координаты шлейфа

При  $\tau = 0$   $X_+ = \frac{9}{2}\sqrt{2}$ ,  $X_- = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ . При  $\tau = t$   $X_+ = X_- = 3\sqrt{2}$ .



Таким образом, форма шлейфа имеет вид параболы, описываемой уравнением (23), при изменении аргумента  $X$  в пределах  $X_+ = \frac{9}{2}\sqrt{2}$ ,  $X_- = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ .

Гораздо быстрее эту задачу можно решить, если связать систему отсчета с кораблем. Эта система отсчета инерциальная. В этой системе отсчета форма шлейфа совпадает с траекторией частиц. Закон движения частиц имеет вид

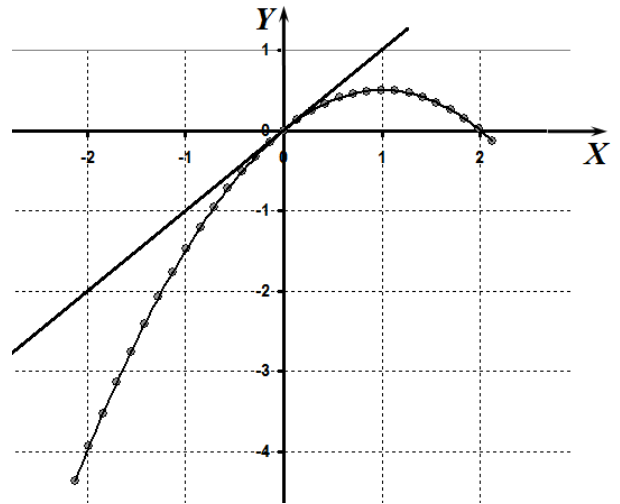
$$\begin{cases} X = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \tau \\ Y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \tau - \frac{\tau^2}{4} \end{cases} \quad (24)$$

Исключая из системы  $\tau$ , получим уравнение траектории в явном виде

$$\begin{aligned} \tau = \sqrt{2}X &\Rightarrow \\ Y = X - \frac{X^2}{2} \end{aligned} \quad (25)$$

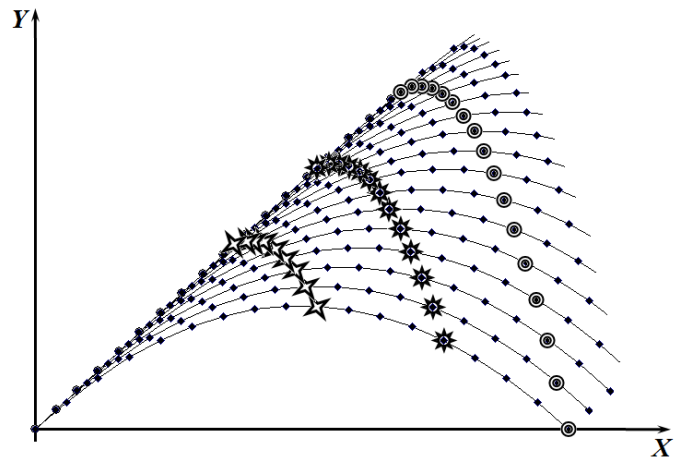
При изменении  $X$  в пределах  $\pm \frac{3}{2}\sqrt{2}$ .

График этой функции в указанных пределах показан на рисунке. Прямая линия на рисунке есть траектория движения корабля.



**Дополнение (необязательное).**

Заметим, что траектории движения всех частиц одинаковы, только начинаются из разных точек. Поэтому можно построить эти траектории. На каждой из них отметить точки, в которых находится частица в равноотстоящие моменты времени. На каждой траектории необходимо выбрать точки соответствующие времени движения от момента испускания до момента, когда наблюдается след  $(t - \tau)$ . Множество этих точек и будет представлять форму шлейфа. На рисунке показано такое построение. Разными значками отмечены точки шлейфа в разные моменты времени.



## Задача 10-3 Термистор

### Часть 1. Термистор.

#### 1.1 Условие теплового равновесия:

$$I^2 R(T) = A(T - T_0) \quad (1)$$

Подставляя выражение для сопротивления  $R(T) = B/T - C \cdot T$ , получим:

$$I^2 (B/T - C \cdot T) = A(T - T_0) \quad (2)$$

Преобразуя равенство (2), получим квадратное уравнение:

$$\left(1 + C \frac{I^2}{A}\right) T^2 - T_0 T - B \frac{I^2}{A} = 0 \quad (3)$$

Решение уравнения (3):

$$T = \frac{T_0 + \sqrt{T_0^2 + 4B \frac{I^2}{A} \xi}}{2\xi}, \quad (4)$$

где  $\xi = 1 + C \frac{I^2}{A}$ .

Для упрощения расчетов можно рассчитать численные значения коэффициентов, входящих в расчетные формулы, кроме того, силу тока удобнее рассчитывать в миллиамперах. Тогда

$$\xi = 1 + C \frac{I^2}{A} = 1 + \frac{5,0}{5,0 \cdot 10^{-3}} \cdot 10^{-6} I^2 = 1 + 1,0 \cdot 10^{-3} I^2.$$

Формулу (4) для удобства расчетов можно представить в виде

$$T = \frac{T_0 + \sqrt{T_0^2 + 4B \frac{I^2}{A} \xi}}{2\xi} = T_0 \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{4B}{AT_0^2} I^2 \xi}}{2\xi} = 300 \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{I^2 \xi}{112,5}}}{2\xi}. \quad (4')$$

После расчета температуры, следует рассчитать сопротивление по формуле

$$R(T) = B/T - C \cdot T = \frac{1,0 \cdot 10^6}{T} - 5,0T, \quad (4'')$$

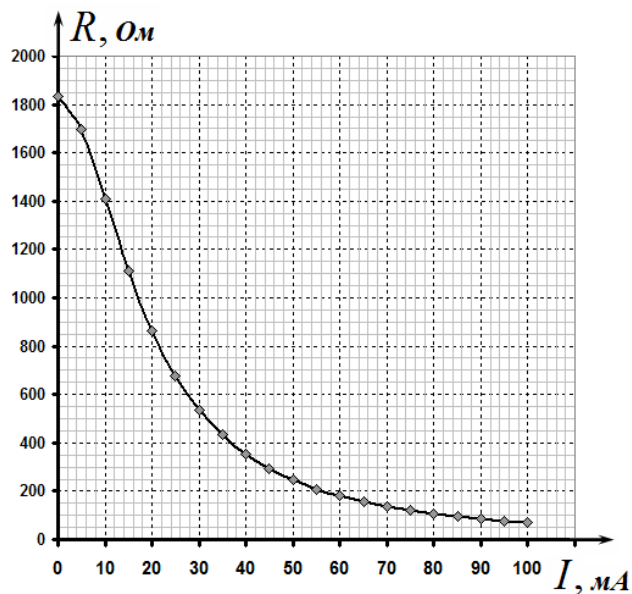
Наконец, по закону Ома можно найти напряжение на термисторе

$$U = IR. \quad (4''')$$

**1.2** Значения температуры, сопротивления термистора и напряжения на нем при различных значениях силы тока приведены в Таблице 1. На рис.1 показан график зависимости сопротивления термистора от силы тока (в установившемся режиме).

Таблица 1. Расчет ВАХ термистора.

$I, \text{мА}$	$\xi$	$T, \text{К}$	$R, \text{Ом}$	$U, \text{В}$
0	1,000	300,0	1833	0,00
5	1,025	308,5	1699	8,50
10	1,100	328,1	1407	14,07
15	1,225	349,9	1109	16,63
20	1,400	369,1	864	17,28
25	1,625	384,6	677	16,92
30	1,900	396,7	537	16,12
35	2,225	406,0	433	15,15
40	2,600	413,2	354	14,15
45	3,025	418,8	293	13,20
50	3,500	423,2	246	12,32
55	4,025	426,8	210	11,52
60	4,600	429,6	180	10,80
65	5,225	431,9	156	10,14
70	5,900	433,8	137	9,56
75	6,625	435,3	120	9,02
80	7,400	436,7	107	8,54
85	8,225	437,8	95	8,10
90	9,100	438,7	86	7,71
95	10,025	439,5	77	7,34
100	11,000	440,3	70	7,01



1.3 Вольтамперная характеристика терморезистора представлена на рис. 2. Напряжение достигает максимального значения  $U_{\text{max}} = 17,3\text{В}$  при силе тока  $I_{U_{\text{max}}} = 20\text{мА}$ .

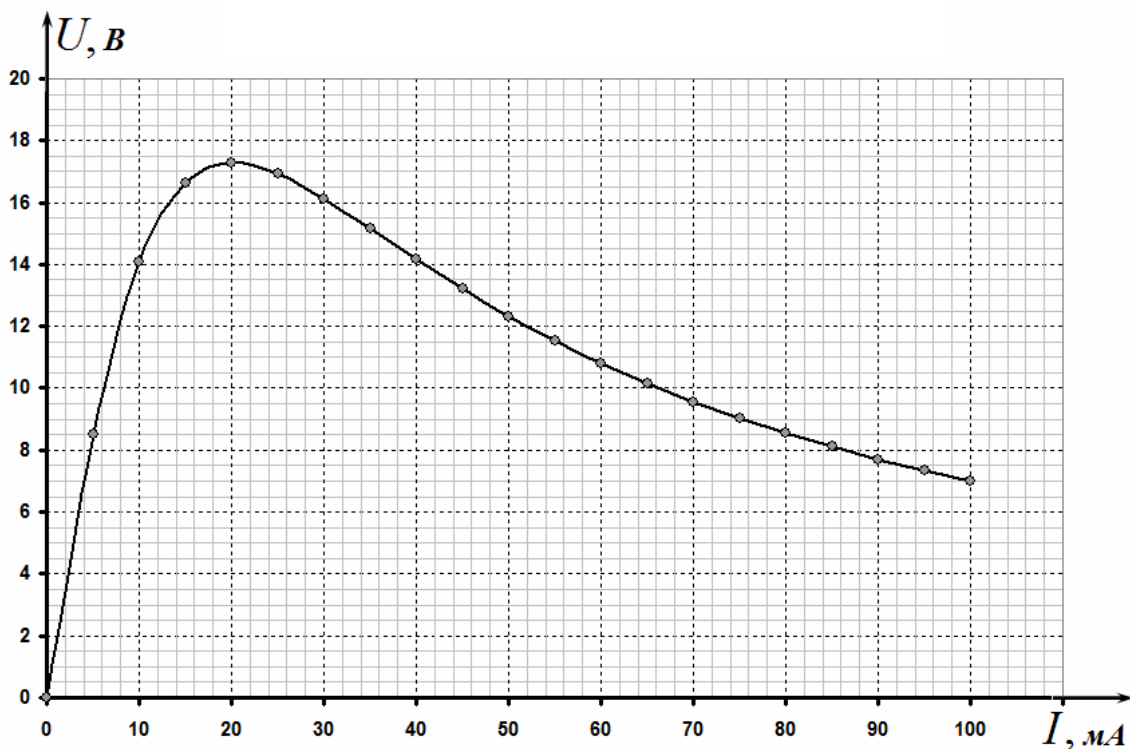


Рис. 2.

## Часть 2. Термистор последовательно с резистором.

2.1 При последовательном соединении терморезистора и сопротивления сумма напряжений на каждом элементе равна общему напряжению в цепи:

$$U_0 = IR + U_T(I) \quad (5)$$

Решения уравнения (5) – это точки пересечения вольтамперной характеристики с прямой:

$$U = U_0 - IR = 19 - 120 \cdot I \quad (6)$$

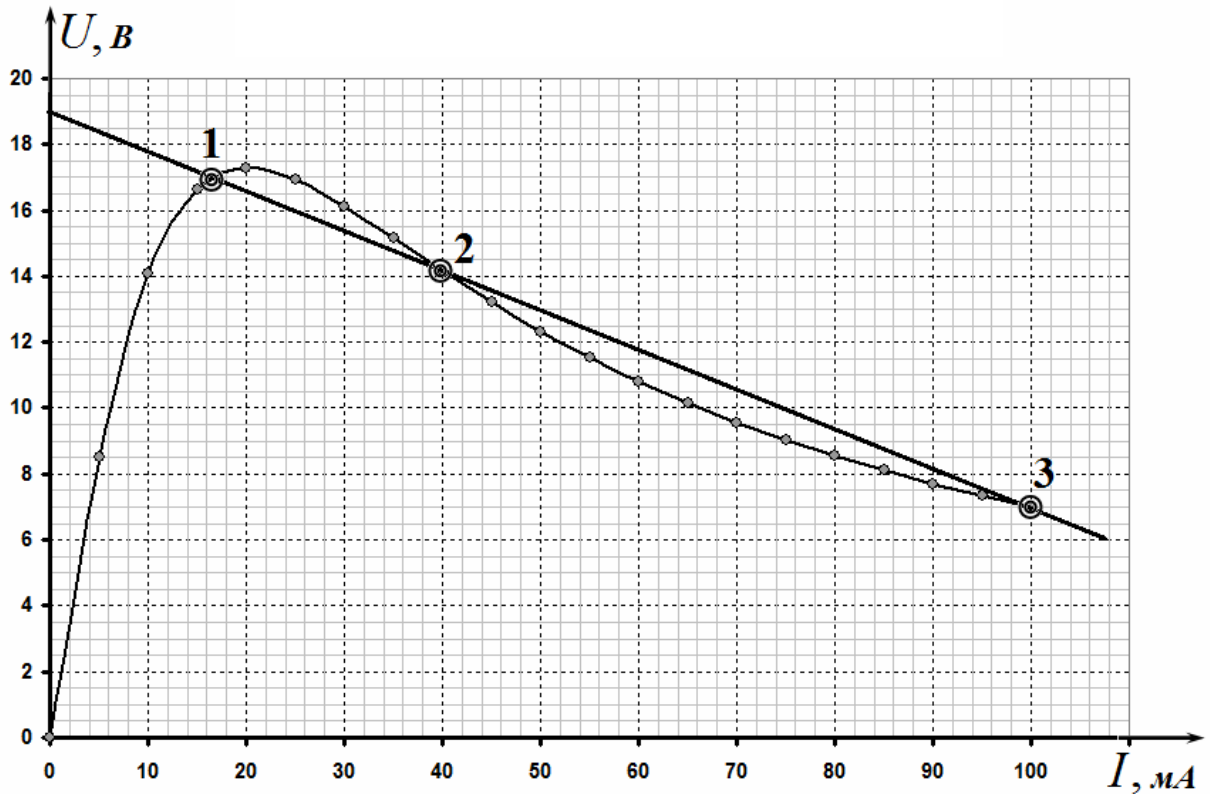


Рис. 3.

К следует из графика изображенного на рис. 3 у уравнения (5) есть целых три решения:

Решение	$I, \text{мА}$	$U, \text{В}$
1	17	17
2	40	14
3	100	7

Однако, только два решения могут реализовываться на практике. Это первое и третье решение. Второе решение – неустойчивое. Случайное увеличение (или уменьшение) тока приведет к переходу к правому (или левому) устойчивому решению.

Допустим, что напряжение на термисторе случайно возросло на малую величину. Это приведет к уменьшению напряжения на резисторе, что приведет к уменьшению силы тока в цепи. А уменьшение силы тока через термистор (в соответствии с его ВАХ) еще больше увеличит напряжение на нем. В этом случае система перейдет к устойчивому состоянию 1. Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что случайное падение напряжения на термисторе переведет систему в устойчивое состояние 3.

2.2 Сопротивление термистора при включении в цепь достаточно большое, поэтому ток в начальный момент времени будет небольшим, и будет постепенно увеличиваться.

Следовательно, в этом случае система «придет» к первому решению уравнения (5), т.е.  $I = 17\text{мА}$ ,  $U = 17\text{В}$ .

**2.3** Реализовать другое устойчивое решение можно двумя способами.

Можно поднять напряжение на источнике до значения, при котором будет только одно решение на «хвосте» вольтамперной характеристики. При этом термистор разогреется до достаточно высокой температуры. А затем уменьшить напряжение до  $U_0 = 19\text{В}$ .

А можно просто предварительно разогреть термистор до относительно высокой температуры, чтобы при включении в цепь ток сразу достиг достаточно большого значения.

### Часть 3. Термистор параллельно с резистором.

**3.1** При подключении термистора, соединенного параллельно с резистором, к источнику постоянного тока, ток источника разделится на две части – ток через термистор и ток через резистор.

$$I_0 = U/R + I_T(U) \quad (7).$$

Для того чтобы термистор стабилизировал напряжение, решение уравнения (7) должно «попадать» на вершину вольтамперной характеристики:  $I_{U_{\max}} = 20\text{мА}$ ,  $U_{\max} = 17,3\text{В}$ .

Подставляя в (7) получим:

$$R = \frac{U_{\max}}{I_0 - I_{U_{\max}}} = 5770\text{Ом} \quad (8).$$

**3.2** Чтобы найти решения уравнения (7) необходимо найти точки пересечения вольтамперной характеристики с графиком прямой:

$$I(U) = I_0 - U/R \quad (9).$$

Проще, конечно, из (8) получить обратную зависимость  $U(I)$ :

$$U(I) = I_0 R - IR \quad (10).$$

$$\text{При токе } I_{01} = 45\text{мА}: \quad U(I) = 23,0 - 577I \quad (11).$$

$$\text{При токе } I_{02} = 55\text{мА}: \quad U(I) = 34,6 - 577I \quad (12).$$

На рис. 4. Представлены графики линейных зависимостей (11) и (12) вместе с вольтамперной характеристикой.

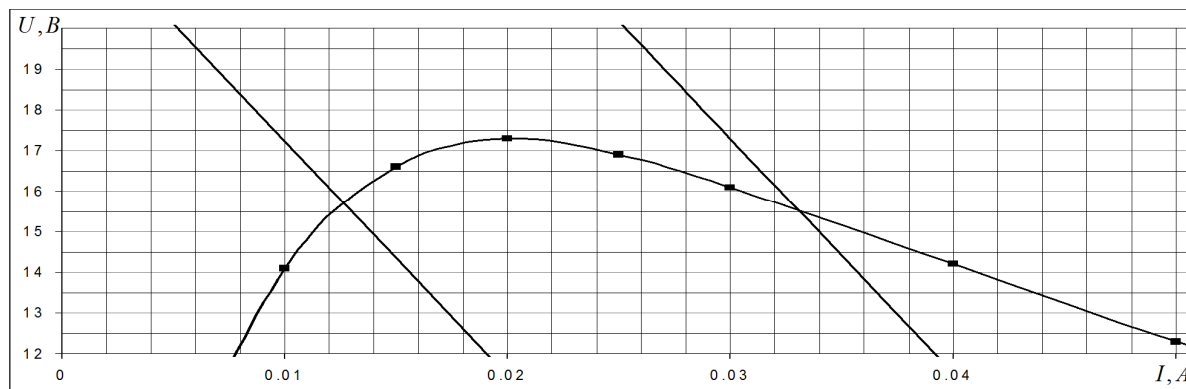


Рис. 4.



Напряжение в точках пересечения графиков практически одинаково и равно:  $U_{\min} = 15.7B$ . При этом сила тока в резисторе равна  $I_{\min} = 27mA$ .

Таким образом, напряжение на резисторе будет изменяться в пределах от  $U_{\min} = 15.7B$  до  $U_{\max} = 17,3B$ , а сила тока от  $I_{\min} = 27mA$  до  $I_{\max} = 30mA$ .

## Задача 11-1 Почему цикл Карно лучше других?

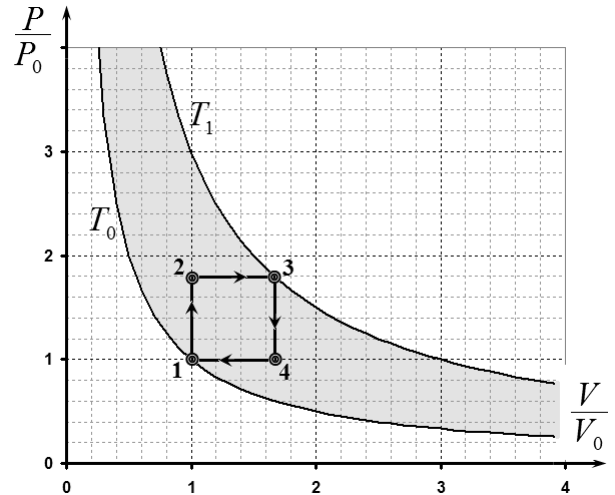
### 1. Квадратный цикл.

Так как цикл «квадратный», то объем и давление газа возрастают в пределах цикла в одно и тоже число раз. Их произведение (пропорциональное температуре) возрастает в  $\beta$  раз, поэтому максимальные объем и давление (в состоянии 3) находятся по формулам

$$V_3 = \sqrt{\beta}V_0, \quad P_3 = \sqrt{\beta}P_0 \quad (1)$$

Газ получает теплоту на участках 1-2 и 2-3.

Суммарное количество теплоты, полученное газом равно



$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{3}{2}RT_0(\sqrt{\beta}-1) + \frac{5}{2}RT_0(\beta-\sqrt{\beta}) = \\ &= \frac{RT_0}{2}(\sqrt{\beta}-1)(3+5\sqrt{\beta}) \end{aligned} \quad (2)$$

Работа совершенная газом за цикл численно равна площади цикла:

$$A = P_0V_0(\sqrt{\beta}-1)^2 = RT_0(\sqrt{\beta}-1)^2. \quad (3)$$

Следовательно, КПД цикла равен

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{RT_0(\sqrt{\beta}-1)^2}{\frac{RT_0}{2}(\sqrt{\beta}-1)(3+5\sqrt{\beta})} = \frac{2(\sqrt{\beta}-1)}{(3+5\sqrt{\beta})}. \quad (4)$$

Как и следовало ожидать, при  $\beta=1$  КПД обращается в нуль, а при возрастании  $\beta$  стремится к предельному значению  $\bar{\eta} = \frac{2}{5} = 0,4$ . Для построения графика полученную зависимость удобно представить в виде:

$$\eta = \frac{2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)}{\left(\frac{3}{\sqrt{\beta}} + 5\right)}. \quad (5)$$

График этой зависимости показан на бланке (кривая - 1)

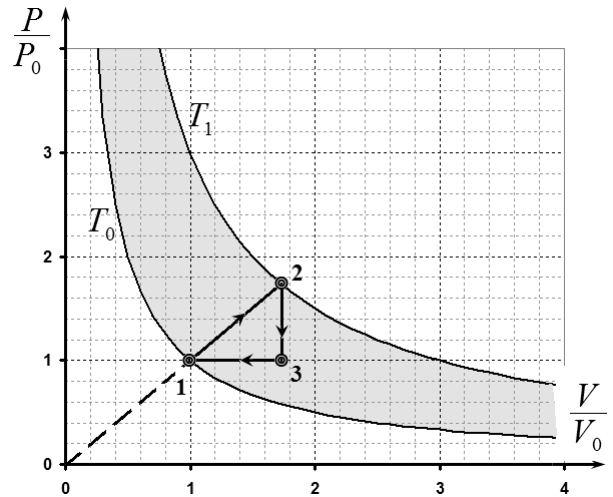
## 2. Треугольный цикл

Расчет КПД проводится аналогично. Газ получает теплоту только на участке 1-2. По первому закону термодинамики, это количество теплоты равно

$$Q_1 = \frac{3}{2}RT_0(\beta - 1) + \frac{1}{2}P_0(1 + \sqrt{\beta})V_0(\sqrt{\beta} - 1) = 2P_0V_0(\beta - 1)$$

Работа, совершенная за цикл:

$$A = \frac{1}{2}P_0V_0(\sqrt{\beta} - 1)^2;$$



КПД цикла

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{(\sqrt{\beta} - 1)^2}{2(\beta - 1)} = \frac{(\sqrt{\beta} - 1)}{3(\sqrt{\beta} + 1) + (\sqrt{\beta} - 1)} = \frac{\sqrt{\beta} - 1}{2(\sqrt{\beta} + 1)}.$$

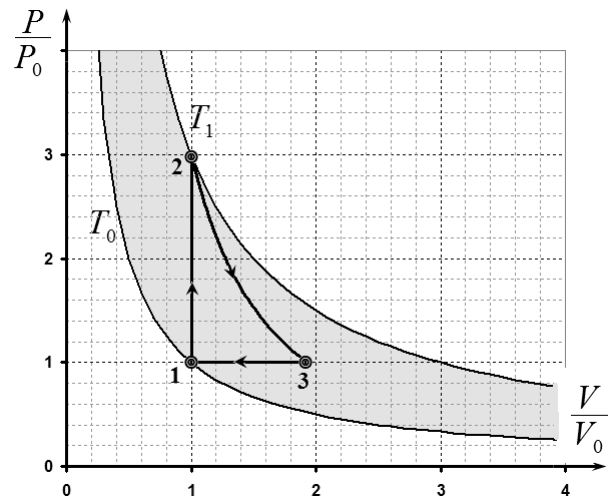
Предельное значение КПД в этом случае равен 0,5. Немного лучше!

## 3. Криволинейно-треугольный цикл.

В данном случае газ получает теплоту на участке изохорного расширения 1-2. Это количество теплоты равно

$$Q_1 = \frac{3}{2}RT_0(\beta - 1).$$

Чтобы не считать работу (т.е. не интегрировать адиабату), найдем количество теплоты, отданное газом на участке 3-1. Для этого следует определить температуру газа в состоянии 3. Точки 2 и 3 соединены адиабатой, причем нам известны значения давлений в крайних точках.



Поэтому запишем уравнение адиабатного процесса в координатах  $(P, T)$ . Из уравнения

состояния идеального газа выразим  $V = \frac{RT}{P}$  и подставим в уравнение адиабаты

$$P\left(\frac{T}{P}\right)^\gamma = const \Rightarrow P^{1-\gamma} T = const.$$

Показатель степени в этом уравнении равен  $-\frac{2}{5}$ . Записывая это уравнение для состояний 2 и 3, получим

$$(\beta P_0)^{\frac{2}{5}} \beta T_0 = P_0^{\frac{2}{5}} T_3 \Rightarrow T_3 = T_0 \beta^{\frac{3}{5}}.$$

Теперь можно записать выражения для количества отданной теплоты:

$$Q_2 = \frac{5}{2}RT_0\left(\beta^{\frac{3}{5}} - 1\right).$$

Наконец, формула КПД обретает вид

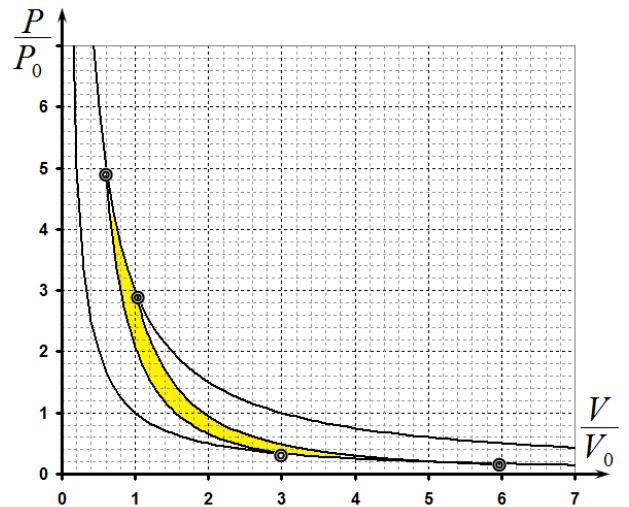
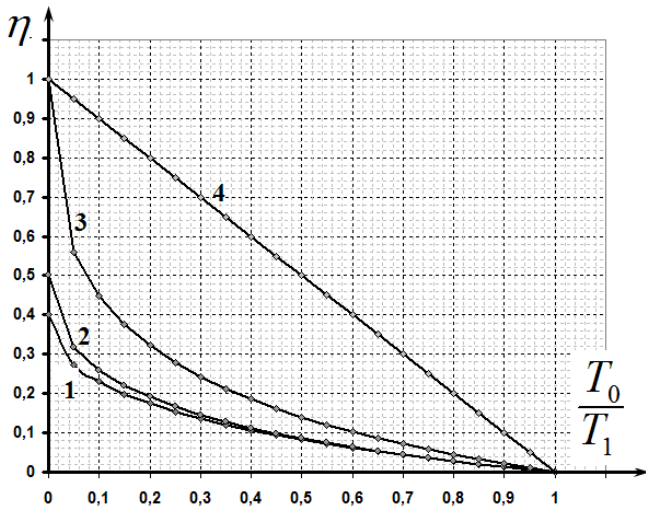
$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{5\left(\beta^{\frac{3}{5}} - 1\right)}{3(\beta - 1)}.$$

В этом цикле при возрастании  $\beta$  КПД стремится к 1. График этой зависимости изображается кривой 3 на бланке.

4. КПД цикла Карно, как известно равен  $\eta = 1 - \frac{T_1}{T_0}$ , график этой зависимости – прямая

линия, идущая выше всех построенных кривых.

Таким образом, при заданных максимальных и минимальных температурах цикл Карно имеет максимально возможный КПД. Ну а рисунок цикла показан на бланке, как видите, его вид весьма далек от традиционных «ромбиков», которые обычно рисуют в учебниках!



## Задача 11-2 Хорошо, что не экспериментальная задача!

### Часть 1. Лобовое столкновение автомобиля с упругой преградой.

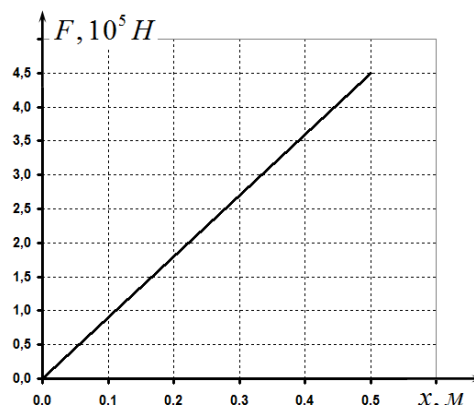
Так как сила, действующая на автомобиль, пропорциональна смещению автомобиля, то она может быть описана функцией (закон Гука)

$$F = kx. \quad (1)$$

Коэффициент упругости легко может быть найден из графика

$$k = \frac{4,5 \cdot 10^5 \text{ Н}}{0,5 \text{ м}} = 9,0 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}}. \quad (2)$$

Скорость автомобиля перед столкновением находится из закона сохранения энергии:



$$\frac{Mv_0^2}{2} = \frac{kS^2}{2} \Rightarrow v_0 = S \sqrt{\frac{k}{M}} = 0,50 \sqrt{\frac{9,0 \cdot 10^5}{1,0 \cdot 10^3}} = 15 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (3)$$

Закон движения автомобиля находится из уравнения второго закона Ньютона

$$Ma = -kx, \quad (4)$$

которое является уравнением гармонических колебаний. Будем считать, что в момент начала столкновения  $t = 0$ , координата автомобиля равна  $x = 0$ , а начальная скорость нами найдена. С учетом начальных условий, закон движения имеет вид

$$x = S \sin \omega t, \quad (5)$$

где круговая частота колебаний равна

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} = 30 \text{ с}^{-1}. \quad (6)$$

Время торможения равно четверти периода колебаний

$$\tau = \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{4\omega} = 5,2 \cdot 10^{-2} \text{ с} = 52 \text{ мс}. \quad (7)$$

Зависимость скорости и ускорения автомобиля от времени имеют вид:

$$v = S\omega \cos \omega t \quad (8)$$

$$a = -S\omega^2 \sin \omega t$$

Максимальное ускорение автомобиль испытывает в последний момент торможения, оно равно

$$a_{\max} = S\omega^2 = 450 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}. \quad (9)$$

Следовательно, максимальная перегрузка автомобиля равна

$$n = \frac{a_{\max}}{g} = 45. \quad (10)$$

## Часть 2. Манекен пристегнут к сидению ремнем безопасности.

Сразу после столкновения манекен продолжает двигаться свободно, перемещаясь на расстояние  $l = 2,0\text{ м}$  относительно автомобиля. Для определения момента времени, когда сработает ремень безопасности можно найти из уравнения

$$v_0 t - S \sin \omega t = l. \quad (11)$$

Это уравнение не может быть решено аналитически, поэтому следует воспользоваться приближенными методами. Предположим, что  $\omega t < 1$ . В этом случае можно воспользоваться приближенной формулой

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}. \quad (12)$$

В этом случае решение уравнения принимает значение

$$v_0 t - S \omega t + S \frac{(\omega t)^3}{6} = l \Rightarrow t = \frac{1}{\omega} \sqrt[3]{\frac{6l}{S}} \approx 0,021\text{ с} = 21\text{ мс}. \quad (13)$$

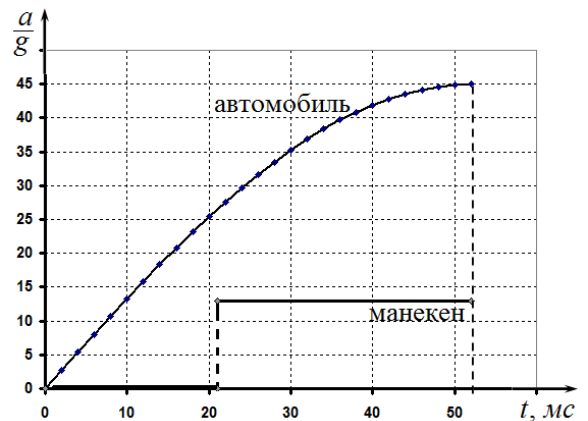
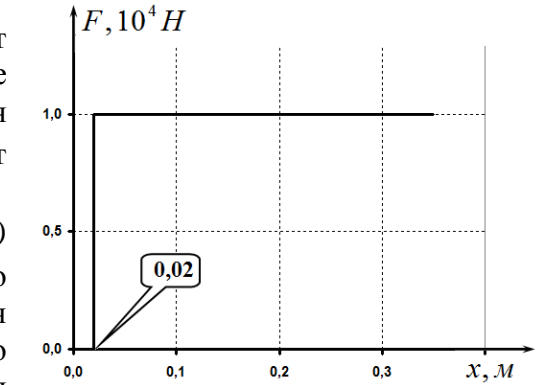
Здесь учтено, что  $v_0 = S\omega$ . При этом  $\omega t \approx 0,62$ . Так, что предположение о малости этой величины оправдано.

*Примечание.* Расчет по формуле (13) дает значение 0,0207. Решение методом Ньютона дает значение 0,2085, что подтверждает правомерность использованного приближенного метода.

После того, как ремень натянулся, на манекен действует постоянная сила  $F$ . В этот промежуток времени перегрузка манекена равна

$$n = \frac{F}{mg} = \frac{1,0 \cdot 10^4}{75} \approx 13. \quad (14)$$

Зависимости перегрузок автомобиля и манекена от времени показаны на рисунке.

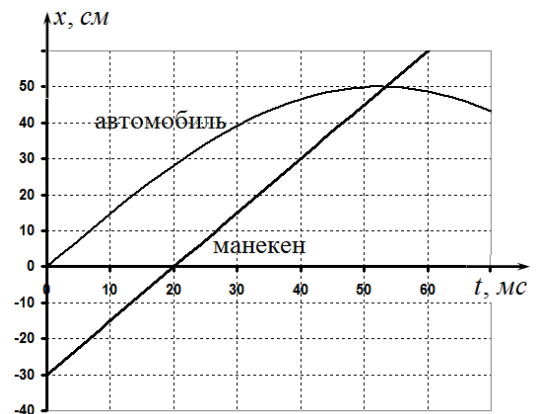


## Часть 3. Манекен не пристегнут.

Чтобы определить время, когда манекен ударится о рулевую колонку, необходимо решить уравнение, аналогичное уравнению (11)

$$v_0 t - S \sin \omega t = L. \quad (15)$$

В данном случае, величину  $\omega t$  нельзя считать малой. Можно провести графический анализ этого уравнения (см. рис.), но поступим проще: Предположим, что столкновение произошло после остановки автомобиля. В этом случае координата автомобиля оказывается равной  $S$ . Следовательно, время движения в этом случае



равно

$$t_1 = \frac{S + L}{v_0} = 0,053c = 53 \text{ мс} , \quad (16)$$

Что больше, чем время столкновения. Значит, действительно, удар о рулевую колонку произойдет после остановки автомобиля.

Далее манекен ударяется о рулевую колонку. Рассчитаем скорость манекена после того, как рулевая колонка разрушится. Для этого запишем выражение для изменения кинетической энергии манекена, которое равно работе силы сопротивления со стороны рулевой колонки<sup>1</sup>:

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = Fd . \quad (17)$$

Из этого уравнения находим

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - \frac{2Fd}{m}} = \sqrt{15^2 - \frac{2 \cdot 1,0 \cdot 10^4 \cdot 0,2}{75}} = 13 \frac{\text{м}}{\text{с}} . \quad (18)$$

Это столкновение будет продолжаться в течении промежутка времени

$$\Delta t = \frac{v_0 - v_1}{F} m = \frac{15 - 13}{1,0 \cdot 10^4} \cdot 75 = 0,015c = 15 \text{ мс} . \quad (19)$$

То есть, это столкновение закончится в момент времени

$$t_2 = t_1 + \Delta t = 68 \text{ мс} . \quad (20)$$

Перегрузка манекена в этом промежутке времени равна

$$n_2 = \frac{F}{mg} = 13,3 . \quad (21)$$

Далее до столкновения со стеклом манекен будет двигаться свободно со скоростью  $v_1$ , пройдя расстояние  $d$ . Столкновение со стеклом произойдет в момент времени

$$t_3 = t_2 + \frac{d}{v_1} = 68 + \frac{0,2}{13} \cdot 10^3 = 83 \text{ мс} . \quad (22)$$

Если бы не рулевая колонка, удар манекена о лобовое стекло произошел бы в момент времени

$$t'_3 = \frac{S + L + 2d}{v_0} = 80 \text{ мс} . \quad (23)$$

Наконец, осталось рассмотреть удар о стекло. Для оценок приме, что силы, действующая со стороны стекла примерно постоянна. Тогда ускорение, с которым движется манекен в этом приближении можно найти по формуле:

$$\Delta x = \frac{v_1^2}{2a} \Rightarrow a = \frac{v_1^2}{2\Delta x} = 1690 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} . \quad (24)$$

Следовательно, перегрузка во время этого удара равна

$$n_4 \approx 170 . \quad (25)$$

Время этого удара  $\Delta t_4 = \frac{2\Delta x}{v_1} \approx 8 \text{ мс}$ . Поэтому манекен остановится в момент времени

$$t_4 = 91 \text{ мс} .$$

Не пристегнутый манекен столкнется со стеклом в момент времени  $t'_3$ , со скоростью  $v_0$  его перегрузка в момент удара будет равна

$$n'_4 = \frac{v_0^2}{2g\Delta x} = 225 . \quad (26)$$

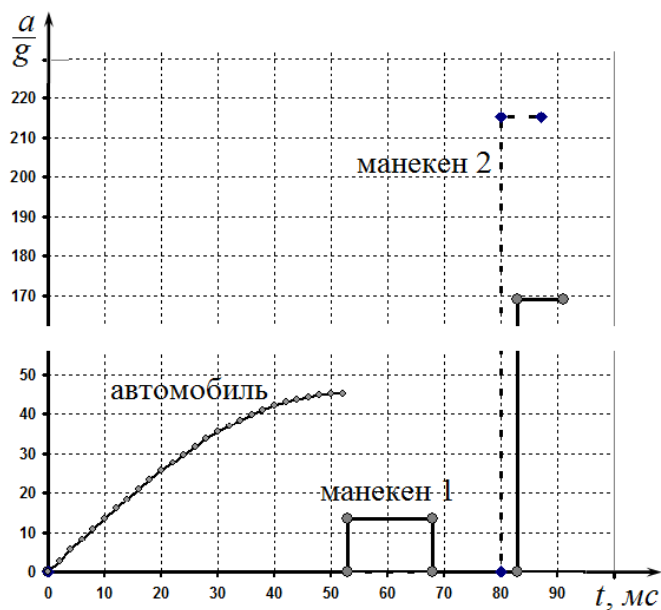
---

<sup>1</sup> Либо равносильное кинематическое соотношение.

Удар будет продолжаться в течение промежутка

$$\Delta t'_4 = \frac{2\Delta x}{v_0} \approx 6,7 \text{ мс}. \quad (27)$$

Полученные данные позволяют построить графики зависимости перегрузки от времени в ходе столкновения.

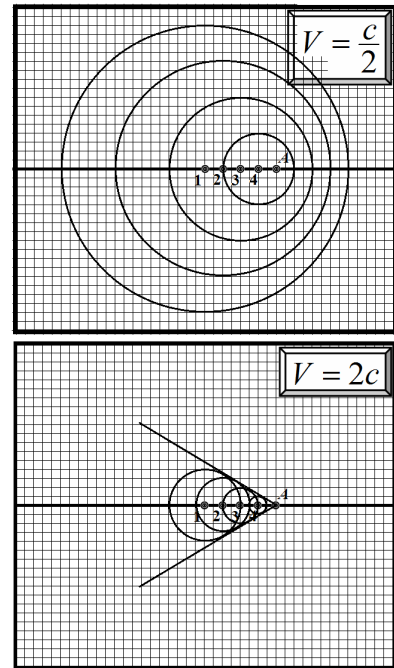


## Задача 11-3 Принцип Гюйгенса, конус Маха, эффект Доплера, излучение Вавилова-Черенкова... и т.д.

### 1. Принцип Гюйгенса.

Требуемое построение, показано на рисунке.

Следует отметить, что во втором случае  $V_0 = 2c$  появляется огибающая, которая и является фронтом ударной волны.



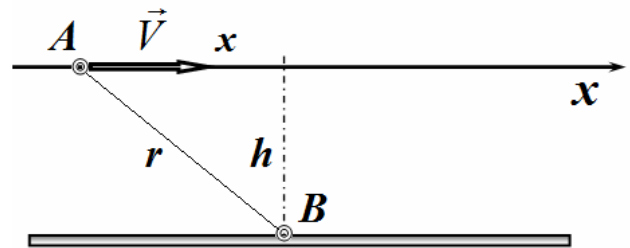
### 2. Конус Маха.

В момент времени  $\tau$  источник находился в точке с координатой  $x = V\tau$ , на расстоянии

$$r = \sqrt{x^2 + h^2} = \sqrt{V^2\tau^2 + h^2} \quad (1)$$

Звук «запоздает» на время, за которое от пройдет это расстояние, Следовательно, дойдет до наблюдателя в момент времени

$$t = \tau + \frac{\sqrt{V^2\tau^2 + h^2}}{c} \quad (2)$$



Для построения примерного графика этой функции можно отметить его следующие характерные особенности:

при  $\tau = 0$   $t = \frac{h}{c}$ , что соответствует времени, которое необходимо, чтобы звук прошел расстояние  $h$ ;

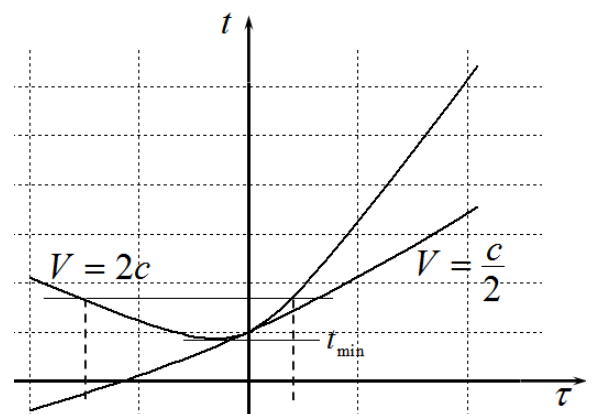
при  $\tau \rightarrow +\infty$   $t \approx \tau + \frac{V}{c}\tau$ , то есть график имеет асимптоту;

при  $\tau \rightarrow -\infty$   $t \approx \tau - \frac{V}{c}\tau$  (надо правильно извлекать корень!) – вторая асимптота.

И вот здесь кроется самое интересное: при  $V > c$  коэффициент наклона второй асимптоты становится отрицательным, следовательно, в этом случае функция (2) имеет точку минимума.

Поэтому графики данной зависимости имеют вид, показанный на рисунке.

Не сложно найти положение этого минимума: вычисляя производную от функции (2) и полагая ее равной нулю, получим уравнение





$$t' = 1 + \frac{V^2 \tau}{c \sqrt{V^2 \tau^2 + h^2}} = 0 \quad (3)$$

Это уравнение имеет единственный корень при  $V > c$ :

$$\tau^* = -\frac{h}{V \sqrt{\frac{V^2}{c^2} - 1}}. \quad (4)$$

Поэтому наблюдатель впервые услышит звук в момент времени

$$t_{\min} = t(\tau^*) = \frac{h}{cV} \sqrt{V^2 - c^2}. \quad (5)$$

Источник в этот момент времени будет находиться в точке с координатой

$$x_1 = V t_{\min} = h \sqrt{\frac{V^2}{c^2} - 1}. \quad (6)$$

В более поздние моменты времени наблюдатель будет одновременно слышать звуки, идущие от разных источников, движущихся в противоположных направлениях.

Именно наличие экстремума свидетельствует о возникновении ударной волны. Потому, что в течение малого промежутка времени  $\Delta t$  практически одновременно будут приходить волны, испущенные в течение гораздо более длительного промежутка  $\Delta \tau$ .

Формально можно поступить следующим образом. Пусть мощность источника равна  $P$ . В течение бесконечно малого промежутка времени  $d\tau$  он испустит энергию  $dE_0 = P d\tau$ . Какая-то ее часть  $dE_1 = \beta P d\tau$  (она определяется геометрией

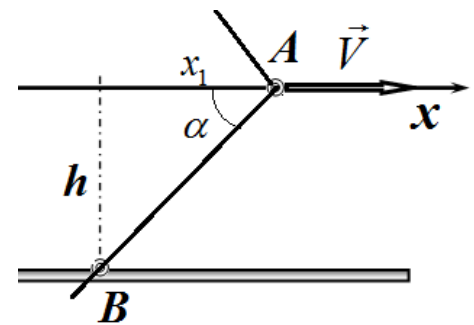
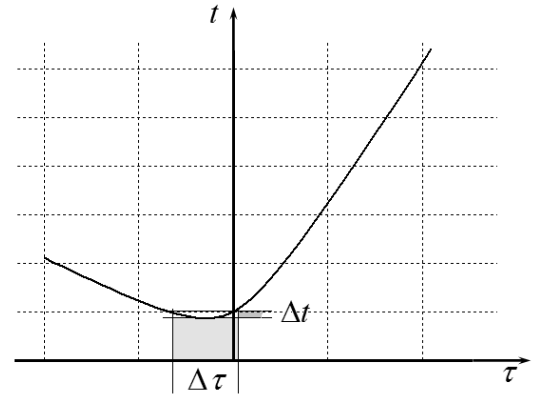
расположения источника и наблюдателя и размером ушей последнего) будет принята в течение промежутка времени  $dt$ , поэтому воспринимаемая мощность определяется по формуле

$$P_1 = \frac{dE_1}{dt} = \beta P \frac{d\tau}{dt} = \frac{\beta P}{t'}. \quad (7)$$

В точке экстремума эта мощность устремляется к бесконечности, что свидетельствует о наличии ударной волны.

Угол полураствора конуса Маха можно найти либо из построения Гюйгенса, либо из формулы (6), в любом случае он определяется соотношением

$$\sin \alpha = \frac{c}{V}. \quad (8)$$



### 3. Эффект Доплера.

Формулы для эффекта Доплера можно получить различными способами. В данном случае простейшим из них является способ, основанный на использовании полученной зависимости (2).

Если считать период волны, испускаемой источником малой величиной ( $T_0 = \Delta\tau$ ), то воспринимаемый период также можно считать малой величиной<sup>2</sup> ( $T_1 = \Delta t$ ). Их отношение можно найти, как производную от функции (2)

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{\Delta t}{\Delta\tau} = t'. \quad (9)$$

Эту производную мы уже вычисляли, поэтому сразу запишем:

$$\frac{v}{v_0} = \frac{T_0}{T_1} = \frac{1}{1 + \frac{V^2\tau}{c\sqrt{V^2\tau^2 + h^2}}}. \quad (10)$$

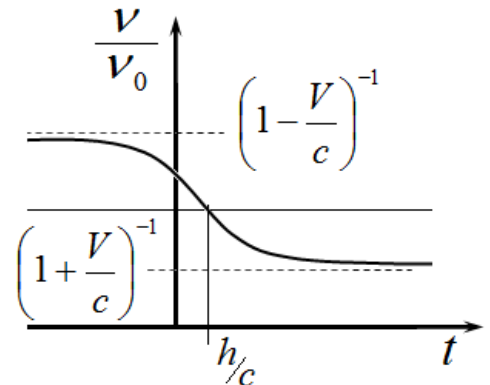
Для получения окончательного результата необходимо выразить  $\tau$  через  $t$ , то есть решить уравнение (2) относительно  $\tau$ .

Если наблюдатель находится на оси, вдоль которой движется источник, то воспринимаемую частоту можно найти из формулы (10), если положить  $h = 0$ . В этом случае получим

$$v_{\pm} = \frac{v_0}{1 \pm \frac{V}{c}}. \quad (11)$$

Знак плюс соответствует наблюдателю находящемуся позади источника (источник удаляется), так как в этом случае в формуле (10)  $\tau > 0$ . Знак минус – случаю, когда источник приближается к наблюдателю<sup>3</sup>.

Для наблюдателя, находящегося сбоку от линии движения источника, частота будет монотонно изменяться от  $v_-$  до  $v_+$ . Для звука, испущенного в момент времени  $\tau = 0$  и пришедшего в момент времени  $t = \frac{h}{c}$ , частота останется неизменной.



### 4. Излучение Вавилова-Черенкова.

**4.1** Излучение начнется, если скорость электронов превысит скорость света в воде, то есть при  $v = \frac{c}{n}$ . В этом случае полная энергия электрона будет равна

$$E_{\min} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}}, \quad (12)$$

<sup>2</sup> Очень интересный вопрос – а что такое частота в данный момент времени? чтобы говорить о частоте, надо зарегистрировать хотя бы одно колебание! Но в физике есть понятие физически малая величина: мала настолько, что можно считать дифференциалом, но велика настолько, что содержит большое число... в данном случае периодов колебаний.

<sup>3</sup> Надо правильно извлекать корень квадратный!

где  $E_0 = mc^2$  - энергия покоя электрона. Ее численное значение (в эВ) равно

$$E_0 = \frac{mc^2}{e} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (3,0 \cdot 10^8)^2}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 512 \text{ кэВ}. \quad (13)$$

Минимальная энергия равна

$$E_{\min} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} = \frac{512 \text{ кэВ}}{\sqrt{1 - \frac{1}{1,33^2}}} = 777 \text{ кэВ}, \quad (14)$$

**4.2** При ускорении электрон должен пройти ускоряющую разность потенциалов, которая находится из условия (записано в эВ)

$$U = E_{\min} - E_0 = E_0 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} - 1 \right) = 2,65 \cdot 10^5 \text{ В}. \quad (15)$$

**4.3** Так как за каждым электроном «тянется» световой конус, то при попадании его на линзу, в ее фокальной плоскости образуется кольцо, радиус которого углом полураствора конуса (не забыть учесть преломление на задней грани сосуда с водой!), а этот угол определяется скоростью электронов.

Скорость электронов найдем из формулы

$$2E_{\min} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2 \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} \Rightarrow v = \frac{c}{2n} \sqrt{3n^2 + 1}. \quad (16)$$

В соответствии с полученным ранее результатом, угол полураствора светового конуса определяется условием

$$\sin \alpha = \frac{c}{nv} = \frac{2}{\sqrt{3n^2 + 1}} = 0,796. \quad (17)$$

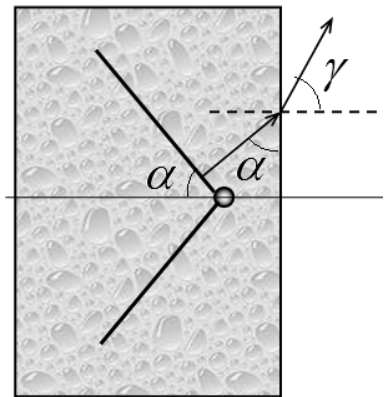
Для дальнейших расчетов удобно перейти от волнового фронта к лучам, которые перпендикулярны фронту. Как следует из рисунка, закон преломления на задней стенке имеет вид:

$$n \cos \alpha = \sin \gamma \quad (18)$$

Из этого выражение определяем угол  $\gamma$  (именно под этим углом к оптической оси лучи будут попадать на линзу):  $\gamma = 53,6^\circ$

Теперь находим радиус кольца на экране:

$$R = F \operatorname{tg} \gamma \approx 14 \text{ см}. \quad (19)$$



## Оглавление.

Класс	Задача	Условие	Решение
<b>9</b>	Задача 9-1. Знаете ли Вы законы Архимеда и Паскаля?	<b>1</b>	<b>17</b>
	Задача 9-2 Сравним амперы с ньютонами!	<b>2</b>	<b>19</b>
	Задача 9-3 Ходьба человека	<b>3</b>	<b>21</b>
<b>10</b>	Задача 10-1 Погреемся на солнышке?	<b>6</b>	<b>27</b>
	Задача 10-2 Мы мирные люди...	<b>8</b>	<b>30</b>
	Задача 10-3 Термистор	<b>10</b>	<b>38</b>
<b>11</b>	Задача 11-1 Почему цикл Карно лучше других?	<b>12</b>	<b>41</b>
	Задача 11-2 Хорошо, что не экспериментальная задача!	<b>14</b>	<b>45</b>
	Задача 11-3 Принцип Гюйгенса, конус Маха, эффект Доплера, излучение Вавилова-Черенкова... и т.д.	<b>16</b>	<b>48</b>

