

Решения задач экспериментального тура.

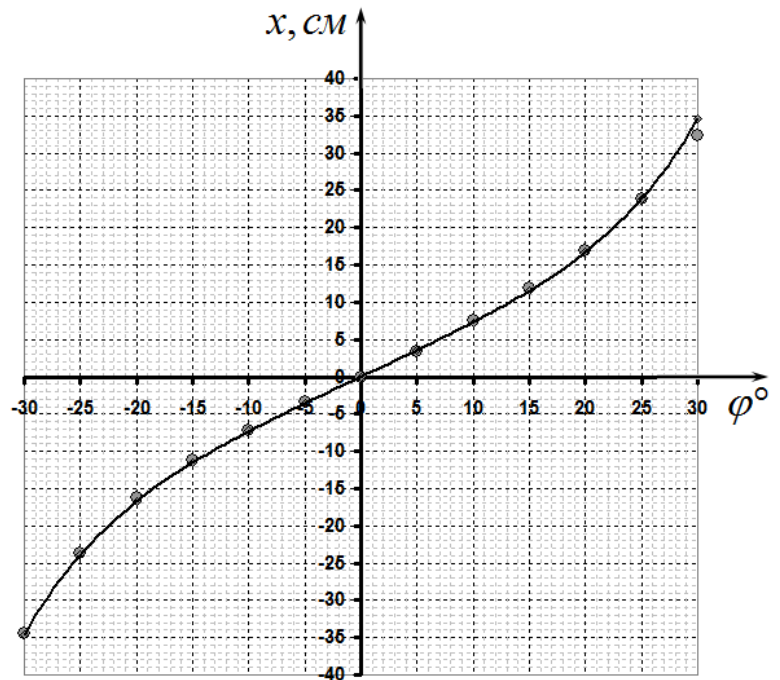
Задача 9-1 «Бегающий зайчик»

1.1 Шкалу необходимо разметить с точностью до 1 см, естественно, получается линейная шкала.

1.2 Результаты измерений зависимости координаты зайчика от угла поворота зеркала приведены в Таблице 1. На рисунке показан график полученной зависимости.

Таблица 1. Координаты зайчика.

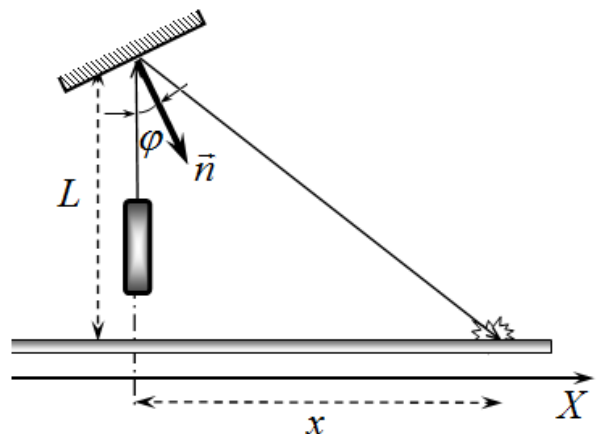
φ°	$x, \text{см}$	$x_{\text{теор}}, \text{см}$
-30		-34,6
-25	-34,3	-23,8
-20	-23,0	-16,8
-15	-16,8	-11,5
-10	-10,2	-7,3
-5	-4,6	-3,5
0	0,0	0,0
5	4,0	3,5
10	9,0	7,3
15	16,0	11,5
20	23,0	16,8
25	33,4	23,8
30		34,6



1.3 Из рисунка хода лучей, построенного с учетом закона отражения света, следует, что при повороте зеркала на угол φ , отраженный луч поворачивается на угол 2φ . Следовательно, координата зайчика на экране определяется формулой

$$x = L \operatorname{tg} 2\varphi. \quad (1)$$

Результаты расчетов $x_{\text{теор}}$ по этой формуле также приведены в Таблице 1. На рисунке также показан график этой зависимости.



1.4 Вторую шкалу удобно построить непосредственно с помощью зайчика. Эта шкала неравномерная.

Часть 2. Средняя скорость.

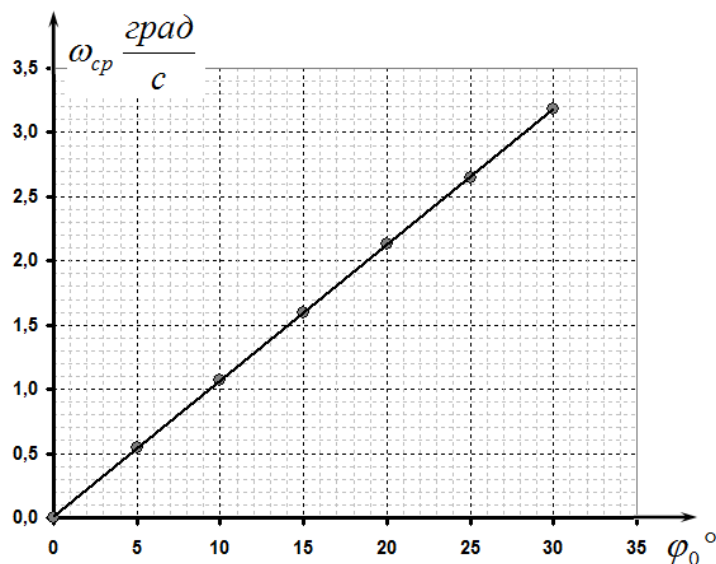
Для измерения следует использовать нелинейную угловую шкалу. Необходимо задать максимальное отклонение φ_0 и измерить времена t прохождения зайчика от одного до другого крайнего положения. Средняя угловая скорость рассчитывается по формуле

$$\omega_{cp} = \frac{2\varphi_0}{t}. \quad (2)$$

Результаты измерений и расчетов средних скоростей приведены в Таблице 2. График требуемой зависимости показан на рисунке.

Таблица 2. Измерение средних скоростей.

φ°	t, c	$\omega_{cp.} \frac{\text{град}}{c}$
5	18,5	0,54
10	18,7	1,07
15	18,7	1,60
20	18,8	2,13
25	18,9	2,65
30	18,9	3,18



Результаты измерений показывают, что период колебаний не зависит от максимального отклонения, поэтому полученная зависимость линейна. Коэффициент пропорциональности в формуле $\omega_{cp.} = C\varphi_0$ имеет смысл величины, обратной четверти периода колебаний. Он может быть найден либо по наклону графика, либо как $C = \frac{2}{t_{cp}}$, где

t_{cp} - среднее значение измеренных времен. Численное значение этого коэффициента в данном случае равно

$$C = 0,11c^{-1}. \quad (3)$$

Часть 3. Закон движения.

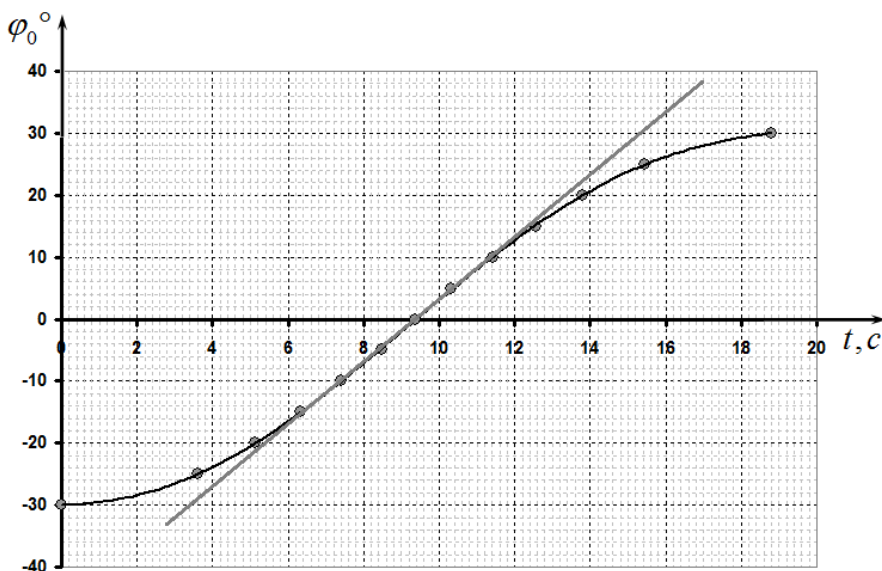
Удобно проводить измерения следующим образом: вывести маятник из положения равновесия, дождаться, когда его максимальное отклонение φ_0 и в этот момент запустить секундомер. Далее фиксировать времена прохождения отметок угловой шкалы с помощью памяти секундомера. При необходимости провести измерения в «два захода»: во втором из них запустить секундомер, когда зайчик проходит через нулевую отметку.

Результаты измерения закона движения $\varphi(t)$ при максимальном отклонении $\varphi_0 = 30^\circ$ приведены в Таблице 3. Там же приведены рассчитанные значения линейной координаты x , а также необходимые для дальнейших построений относительные величины $\frac{\varphi}{\varphi_0}$ и $\frac{x}{x_0}$.

Таблица 3. Закон движения маятника.

φ°	$x, \text{см}$	$t, \text{с}$	$\frac{\varphi}{\varphi_0}$	$\frac{x}{x_0}$
-30	-34,6	0,00	-1,00	-1,00
-25	-23,8	3,60	-0,83	-0,69
-20	-16,8	5,13	-0,67	-0,48
-15	-11,5	6,32	-0,50	-0,33
-10	-7,3	7,41	-0,33	-0,21
-5	-3,5	8,48	-0,17	-0,10
0	0,0	9,37	0,00	0,00
5	3,5	10,33	0,17	0,10
10	7,3	11,41	0,33	0,21
15	11,5	12,55	0,50	0,33
20	16,8	13,81	0,67	0,48
25	23,8	15,45	0,83	0,69
30	34,6	18,80	1,00	1,00

Рядом приведен график закона движения маятника $\varphi(t)$. Очевидно, что максимальная скорость достигается в начале координат. Для определения мгновенной скорости следует построить касательную к графику закона движения (она показана на рисунке) и рассчитать ее коэффициент наклона. Для приведенного закона движения она оказывается равной



$\omega_{\max} \approx 5,0 \frac{\text{град}}{\text{с}}$. Средняя скорость рассчитывается по формуле

$$\omega_{\text{ср.}} = 2 \frac{\varphi_0}{t_{\max}} = \frac{2 \cdot 30}{18,8} \approx 3,2 \frac{\text{град}}{\text{с}}.$$

Таким образом, их отношение равно $\frac{\omega_{\max}}{\omega_{\text{ср.}}} \approx 1,6$.

Отметим, что при гармонических колебаниях теоретическое значение этого отношения есть $\frac{\pi}{2} \approx 1,57$. Поэтому данный метод можно использовать для экспериментального определения числа π .

Задача 9.2 Изучение термопары.

Часть 1. Ознакомление с работой мультиметра.

Результаты измерений приведены в таблице 1.

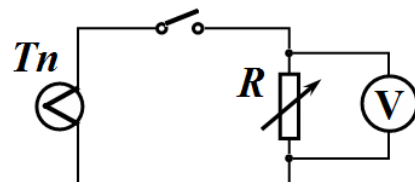
Таблица 1. Результаты измерений.

Условия	Истинная температура	Температура (измеренная)	Сопротивление	Напряжение
Тающий лед	0°C	-3°	12,1 Ом	-60 мВ
Комнатная температура	15°C	11°C	14,1 Ом	0,0
Кипящая вода	100°C	97°C	25,3 Ом	3,3 мВ

Часть 2. Термопара, как источник электроэнергии.

2.1 Подключать резистор следует к центральной и одной из крайних клемм.

2.2 Электрическая схема для проведения измерений показана на рисунке (здесь обозначено T_n – термопара). При измерении сопротивления ключ следует отключить.

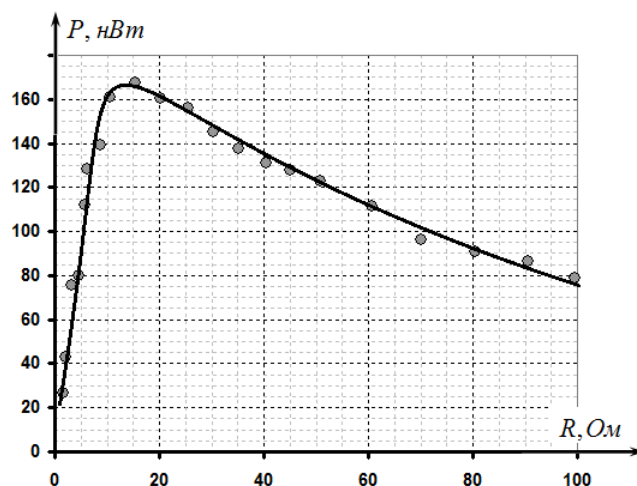
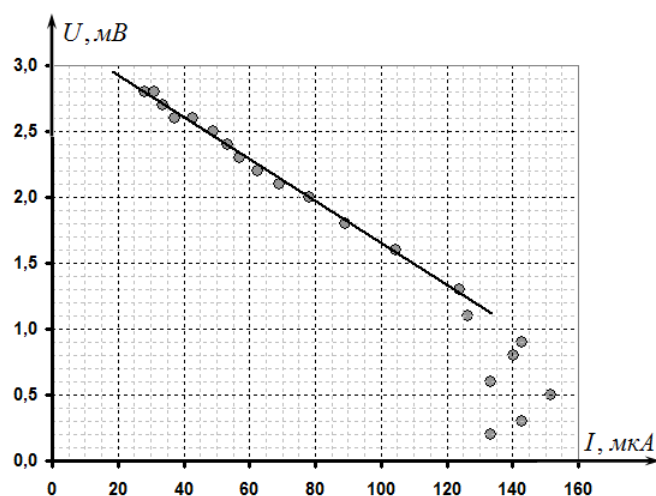


2.3 Результаты измерений зависимости напряжения на резисторе U от его сопротивления R приведены в Таблице 2. Также представлены результаты расчетов силы тока (по формуле $I = \frac{U}{R}$) и мощности (по

формуле $P = IU$)

Таблица 2.

R , Ом	U , мВ	I , мкА	P , нВт
99,6	2,8	28,1	78,7
90,6	2,8	30,9	86,5
80,4	2,7	33,6	90,7
70,1	2,6	37,1	96,4
60,6	2,6	42,9	111,6
50,9	2,5	49,1	122,8
45,0	2,4	53,3	128,0
40,4	2,3	56,9	130,9
35,2	2,2	62,5	137,5
30,4	2,1	69,1	145,1
25,6	2,0	78,1	156,3
20,2	1,8	89,1	160,4
15,3	1,6	104,6	167,3
10,5	1,3	123,8	161,0
8,7	1,1	126,4	139,1
6,3	0,9	142,9	128,6
5,7	0,8	140,4	112,3
4,5	0,6	133,3	80,0
3,3	0,5	151,5	75,8
2,1	0,3	142,9	42,9
1,5	0,2	133,3	26,7



Рядом с таблицей показаны графики зависимости напряжения на резисторе от силы тока и зависимости мощности на резисторе от его сопротивления.

Зависимость $U(I)$ линейна. При малых напряжениях полученный разброс объясняется малой точностью измерений. Эта зависимость может быть объяснена следующим образом. Пусть термопара создает напряжение U_0 , которое сумме напряжений на резисторе U и напряжения на термопаре (из-за ее сопротивления r) Ir . Следовательно, напряжение на резисторе

$$U = U_0 - Ir. \quad (1)$$

Таким образом, коэффициент наклона графика $U(I)$, взятый с противоположным знаком, равен сопротивлению термопары. По графику можно найти это значение

$$r \approx 16 \text{ Ом}. \quad (2)$$

График зависимости мощности от сопротивления $P(R)$ имеет четко выраженный максимум. Он объясняется следующим образом: ростом сопротивления спадает сила тока в цепи, но возрастает доля напряжения на резисторе. По графику можно определить, что максимальная мощность выделяется при сопротивлении резистора примерно равном $R \approx 15 \text{ Ом}$, что примерно совпадает с сопротивлением термопары. Эта максимальная мощность примерно равна $P_{\max} \approx 170 \text{ нВт} = 0,17 \cdot 10^{-6} \text{ Вт}$

Для расчета стоимости электроэнергии следует перевести эту энергию в киловатт-часы и умножить на стоимость одного киловатт-часа:

$$C = cPt = 200 \frac{\text{руб}}{\text{кВт} \cdot \text{час}} \cdot 0,17 \cdot 10^{-3} \text{ кВт} \cdot 365 \cdot 24 \text{ час} \approx 300 \text{ руб.}$$

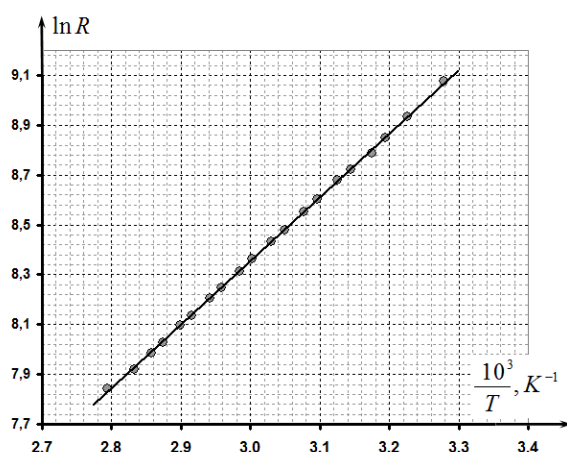
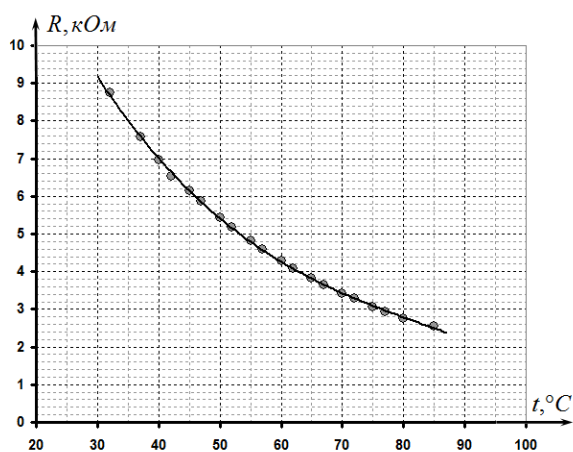
Задача 10-1 «Терморезистор»

Часть 1. Градуировка терморезистора.

1.1 Результаты измерений зависимости сопротивления терморезистора от температуры приведены в таблице 1. График полученной зависимости показан на рисунке

Таблица 1. Зависимость сопротивления от температуры.

$t, ^\circ\text{C}$	$R, \text{кОм}$	$\ln R$	$\frac{10^3}{T}, \text{K}^{-1}$
85	2,55	7,844	2,793
80	2,75	7,919	2,833
77	2,94	7,986	2,857
75	3,07	8,029	2,874
72	3,28	8,096	2,899
70	3,42	8,137	2,915
67	3,66	8,205	2,941
65	3,82	8,248	2,959
62	4,08	8,314	2,985
60	4,29	8,364	3,003
57	4,60	8,434	3,030
55	4,81	8,478	3,049
52	5,17	8,551	3,077
50	5,44	8,602	3,096
47	5,88	8,679	3,125
45	6,14	8,723	3,145
42	6,54	8,786	3,175
40	6,97	8,849	3,195
37	7,58	8,933	3,226
32	8,75	9,077	3,279



1.2 Для доказательства применимости приведенной формулы и определения энергии активации полученную зависимость $R(t)$ следует привести к линейному виду. Для этого прологарифмируем приведенную формулу (записанную для сопротивления)

$$R = R_0 \exp\left(\frac{\Delta E}{2kT}\right) \Rightarrow \ln R = \ln R_0 + \frac{\Delta E}{2kT}. \quad (1)$$

Из этого выражения следует, что зависимость логарифма сопротивления $y = \ln R$ от величины обратной абсолютной температуре $x = \frac{1}{T}$ линейна

$$y = ax + b, \quad (2)$$

Причем параметры этой зависимости определяются формулами

$$a = \frac{\Delta E}{2k}, \quad b = \ln R_0. \quad (3)$$

В Таблице 1 приведены рассчитанные значения логарифма сопротивления и обратной абсолютной температуры. Также на графике показан график полученной зависимости. Линейность графика доказывает применимость приведенной формулы. Параметры линейной зависимости предпочтительнее рассчитывать по методу наименьших квадратов. Расчет приводит к следующим значениям¹

$$\begin{aligned} a &= (2,55 \pm 0,2) \cdot 10^3 \text{ K}^{-1} \\ b &= (0,70 \pm 0,07)_{\text{усл.ед.}} \end{aligned} \quad (4)$$

Используя выражение для параметра a , легко найти энергию активации в джоулях:

$$\Delta E = 2ka$$

в электрон-вольтах:

$$\Delta E = \frac{2k}{e} a \quad (5)$$

Численное значение этой величины

$$\Delta E = \frac{2k}{e} a = \frac{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \cdot 2,55 \cdot 10^3 = 0,44 \text{ эВ}. \quad (6)$$

С погрешностью

$$\delta(\Delta E) = \Delta E \frac{\Delta a}{a} = 0,04 \text{ эВ}. \quad (7)$$

Часть 2. Измерение теплоемкости.

2.1 Результаты измерений зависимости температуры воды от времени приведены в Таблице 2.

Таблица 2. Остывание воды.

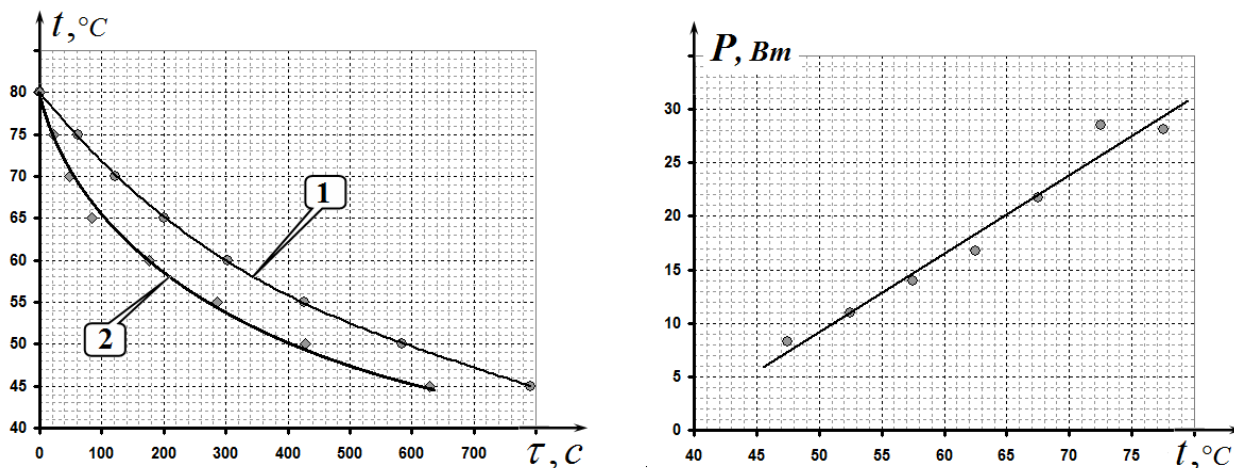
$t, ^\circ\text{C}$	$R, \text{кОм}$	$\tau, \text{с}$	$t_{\text{ср.}} ^\circ\text{C}$	$P, \text{Вт}$
80	2,78	0		
75	3,08	61	77,5	28,12
70	3,43	122	72,5	28,50
65	3,83	201	67,5	21,77
60	4,29	304	62,5	16,72
55	4,82	427	57,5	13,99
50	5,43	584	52,5	10,98
45	6,15	792	47,5	8,29

¹ Допустимо определять параметр a по наклону графика. Значение параметра b зависит от того в каких единицах (Ом или кОм) измерены сопротивления, кроме того, для дальнейших расчетов от не нужен, поэтому его можно не рассчитывать.

2.2 Для расчета мощности теплоотдачи следует использовать формулу

$$P = \frac{\delta Q}{\Delta \tau} = cm \frac{\Delta t^\circ}{\Delta \tau}, \quad (8)$$

где $c = 4,2 \frac{\text{Дж}}{\text{г} \cdot \text{К}}$ - удельная теплоемкость воды, $m = 80 \text{ г}$ - масса воды в сосуде, Δt° - изменение температуры воды, $\Delta \tau$ - время, в течение которого это изменение произошло. В качестве температуры, для которой рассчитана данная мощность, предпочтительнее использовать среднее значение температуры t_{cp} на рассматриваемом интервале. В Таблице 2 также приведены результаты этих расчетов. Ниже показаны графики зависимости температуры воды от времени (кривая 1) и мощности теплоотдачи от температуры.



Параметры зависимости мощности теплоотдачи от температуры $P = At + B$ также могут быть рассчитана по МНК (или графически). Численные значения этих параметров равны

$$A = 0,73 \frac{\text{Втм}}{\text{К}}, \quad B = -27 \text{ Втм}. \quad (9)$$

2.3 Зависимость температуры воды ($t, ^\circ\text{C}$) от времени ($\tau, \text{с}$) при остывании с опущенным цилиндром представлена в Таблице 3. График данной зависимости показан на рисунке (кривая 2).

Таблица 3. Остывание цилиндра.

$t, ^\circ\text{C}$	$\tau, \text{с}$	$P, \text{Втм}$	$\delta Q_0, \text{Дж}$	$\delta Q_1, \text{Дж}$	$\delta Q_2, \text{Дж}$	$Q_2, \text{Дж}$
80	0,0		0	0	0	0
75	23,0	29,6	1300	681	619	619
70	48,4	25,9	1300	657	643	1263
65	84,3	22,3	1300	800	500	1763
60	175,8	18,6	1300	1705	-405	1358
55	285,9	15,0	1300	1649	-349	1009
50	429,0	11,3	1300	1620	-320	689
45	629,4	7,7	1300	1538	-238	450

2.4 Мощность теплоотдачи в каждом температурном диапазоне рассчитана по значениям параметров (9) линейной зависимости $P = At + B$. Количество теплоты, отданное водой в каждом температурном интервале, рассчитано по формуле

$$\delta Q_0 = cm \Delta t^\circ. \quad (10)$$

В данном случае $m = 60 \text{ г}$, а $\Delta t = 5^\circ\text{C}$ для всех интервалов, поэтому эта величина постоянна для всех интервалов.

Количество теплоты, отданное в окружающую среду, рассчитано по формуле

$$\delta Q_1 = P \Delta \tau. \quad (11)$$

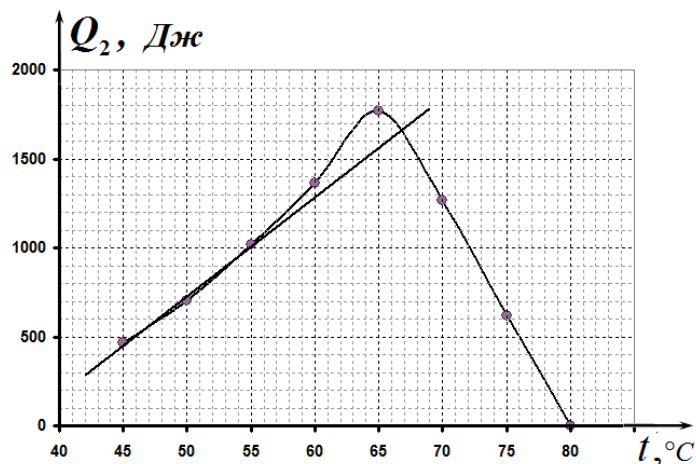
Количество теплоты, переданное цилиндру, находится как разность

$$\delta Q_2 = \delta Q_0 - \delta Q_1. \quad (12)$$

Наконец, для подсчета величины Q_2 - суммарной теплоты, переданной цилиндру, равно сумме теплот δQ_2 от начала остывания до соответствующего значения температуры воды.

2.5 На рисунке показан график зависимости Q_2 от температуры воды.

В начале остывания температура цилиндра меньше температуры воды, поэтому цилиндр получает теплоту. Максимальное значение этой полученной теплоты равно $Q_{2\text{max}} \approx 1700 \text{ Дж}$ и достигается при температуре примерно равной $t^* \approx 65^\circ\text{C}$. После того, как температуры воды и цилиндра примерно выровнялись², цилиндр начинает отдавать теплоту. Поэтому величины δQ_2 становятся отрицательными, а зависимость $Q_2(t)$ становится убывающей. Минимальное значение $Q_{2\text{min}} \approx 500 \text{ Дж}$, очевидно, достигается при минимальной температуре воды $t_{\text{min}} = 45^\circ\text{C}$.



2.4 Для расчета теплоемкости цилиндра можно использовать несколько методов, они изложены в порядке возрастания точности)

Метод 1. По нагреву цилиндра.

Из полученной зависимости $Q_2(t)$ следует, что на нагревание цилиндра от комнатной температуры (в наших экспериментах $t_{\text{ком}} = 16^\circ\text{C}$) до максимальной температуры $t^* \approx 65^\circ\text{C}$ потребовалось $Q_{2\text{max}} \approx 1700 \text{ Дж}$. Следовательно, теплоемкость цилиндра равна

$$C = \frac{Q_{2\text{max}}}{t^* - t_{\text{ком}}} \approx \frac{1700}{65 - 16} \approx 35 \frac{\text{Дж}}{\text{К}} \quad (13)$$

Метод 2. По остыванию цилиндра.

При остывании цилиндра его температура упала от $t^* \approx 65^\circ\text{C}$ до $t_{\text{min}} = 45^\circ\text{C}$, при этом он отдал количество теплоты, равное $Q_{2\text{max}} - Q_{2\text{min}} \approx 1200 \text{ Дж}$. Это позволяет оценить теплоемкость цилиндра

$$C = \frac{Q_{2\text{max}} - Q_{2\text{min}}}{t^* - t_{\text{min}}} \approx 60 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}. \quad (14)$$

Полученная разбежка может быть объяснена неточностью определения максимальной температуры цилиндра $t^* \approx 65^\circ\text{C}$. Так как шаг изменения температуры составляет 5°C , то

² На самом деле температура цилиндра должна быть все время чуть выше температуры воды, для обеспечения теплопередачи от цилиндра к воде. Однако процесс остывания идет достаточно медленно, а теплопроводность алюминия высока, поэтому можно считать, что в любой момент времени температура цилиндра равна температуре воды.

и погрешность определения температуры составляет такую же величину, что приводит к погрешности определения теплоемкости минимум в 20%. По этой же причине велика погрешность определения величины $Q_{2\max}$. Кроме того, на быстром этапе нагревания возможно, что не весь цилиндр успевает достичь теплового равновесия, что приводит к заниженному значению его теплоемкости.

Метод 3. По скорости остывания цилиндра.

Можно заметить, что зависимость $Q_2(t)$ на последних интервалах примерно линейна. Как уже отмечалось, на этом этапе температура цилиндра примерно равна температуре воды.

На этом участке коэффициент наклона графика $\frac{\Delta Q_2}{\Delta t^\circ}$ оказывается равным теплоемкости цилиндра. На рисунке проведена усредненная прямая, аппроксимирующая полученную зависимость на этапе остывания. Определенная по ее наклону теплоемкость цилиндра оказывается равной

$$C \approx 55 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}. \quad (15)$$

Это значение и этот метод являются наиболее точными.

Отметим, что коэффициент наклона на этапе разогрева имеет примерно в два раза большее значение. Это подтверждает предположение о неполном нагревании цилиндра (т.е. его внутренняя часть нагреться не успевает).

Примечание. Масса цилиндра примерно равна $m_0 \approx 60 \text{ г}$, следовательно, полученное

значение удельной теплоемкости алюминия равно $c = \frac{C}{m} \approx 0,92 \frac{\text{Дж}}{\text{г} \cdot \text{К}}$, при табличном

значении $c = 0,88 \frac{\text{Дж}}{\text{г} \cdot \text{К}}$. Таким образом, отличие составляет менее 5%.

Задача 10-2 Струя из бутылки.

1.1 Формула имеет вид

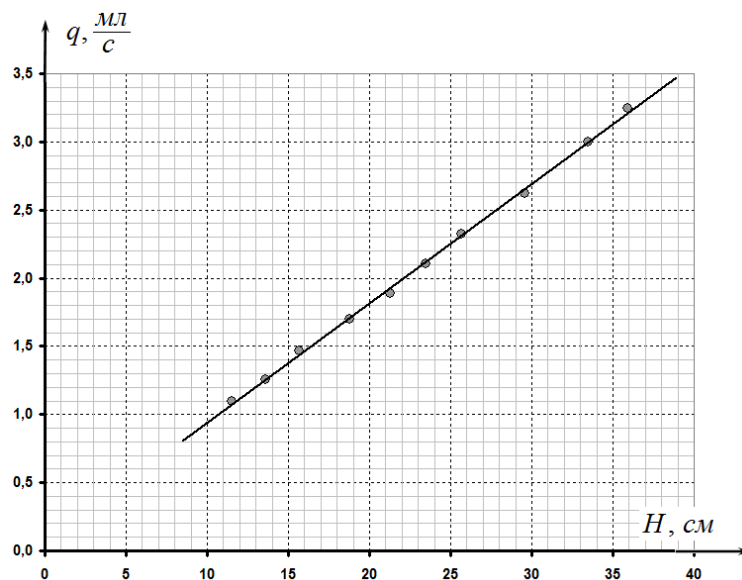
$$q = \pi r^2 v_0 \quad (1)$$

1.2 Для изучения зависимости расхода жидкости q от гидравлического напора воды H , были проведены измерения времени вытекания $V = 20\text{мл}$ воды. Для каждой высоты H проведено три измерения и вычислено среднее значение. Расход воды q рассчитывался по определению.

Результаты измерений и расчетов приведены в Таблице 1, полученная зависимость представлена на графике.

Таблица 1. Расход жидкости.

$H, \text{см}$	Время вытекания, с				$q, \frac{\text{мл}}{\text{с}}$
	t_1	t_2	t_3	$t_{\text{ср.}}$	
36	6,23	6,13	6,11	6,16	3,25
34	6,61	6,68	6,70	6,66	3,00
30	7,66	7,58	7,63	7,62	2,62
26	8,70	8,49	8,60	8,60	2,33
24	9,60	9,44	9,42	9,49	2,11
21	10,54	10,66	10,62	10,61	1,89
19	11,71	11,79	11,85	11,78	1,70
16	13,79	13,56	13,65	13,67	1,46
14	15,90	16,02	15,96	15,96	1,25
12	18,26	18,23	18,36	18,28	1,09



Полученные данные однозначно свидетельствуют, что расход воды прямо пропорционален гидравлическому напору. Так как скорость вытекания пропорциональна напору, то скорость вытекания прямо пропорциональна величине H . Следовательно, показатель степени в приведенной формуле

$$\gamma = 1.$$

Часть 2.

2.1 (Теоретическая задача)

Длина струи, при отсутствии сопротивления воздуха рассчитывается по формуле

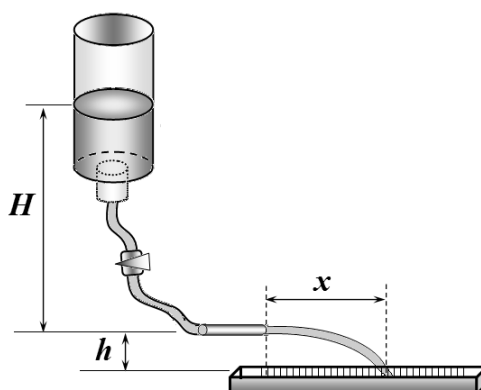
$$x = v_0 \tau = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad (2)$$

здесь $\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ - время падения струи с высоты h .

Так как согласно результатам, полученным в части 1 начальная скорость v_0 пропорциональна напору

$v_0 = aH$, то длина струи должна быть пропорциональна напору H , причем коэффициент пропорциональности в свою очередь пропорционален \sqrt{h} . Таким образом, теоретическая зависимость длины струи от параметров установки имеет вид

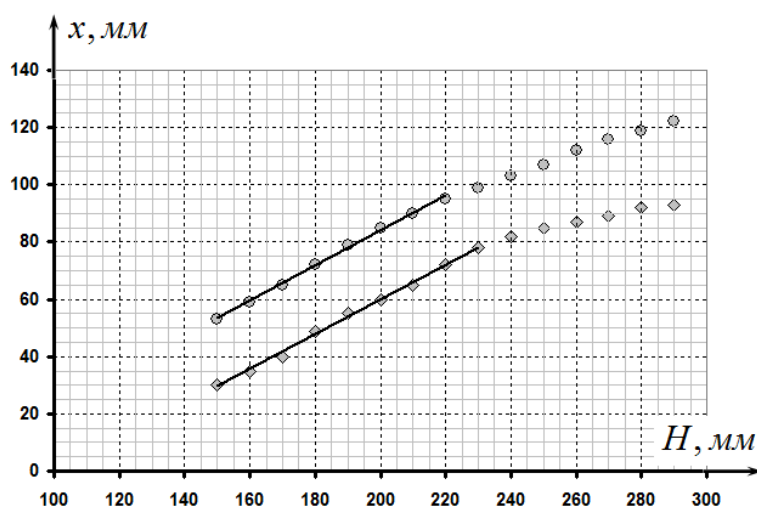
$$x = c\sqrt{h} \cdot H. \quad (3)$$



2.2 Результаты измерений зависимости длины струи от гидравлического напора H при двух значениях высоты струи приведены в Таблице 2. Рядом показаны графики полученных зависимостей.

Таблица 2. Длина струи.

$H, \text{мм}$	$x, \text{мм}$	
	$h = 7 \text{мм}$	$h = 14 \text{мм}$
290	93	122
280	92	119
270	89	116
260	87	112
250	85	107
240	82	103
230	78	99
220	72	95
210	65	90
200	60	85
190	55	79
180	49	72
170	40	65
160	35	59
150	30	53



2.3 На каждом из графиков можно выделить линейный участок коэффициенты этих зависимостей $x = aH + b$ равны

Для $h = 14 \text{мм}$: $a = 0,61$, $b = -39 \text{мм}$;

Для $h = 7 \text{мм}$: $a = 0,61$, $b = -61 \text{мм}$.

Однако зависимости не являются прямо пропорциональными, более того, коэффициенты наклона для них практически одинаковы. По-видимому, основной причиной расхождений

являются многочисленные факторы, влияющие на форму струи: поверхностное натяжение, сопротивление воздуха и т.д.

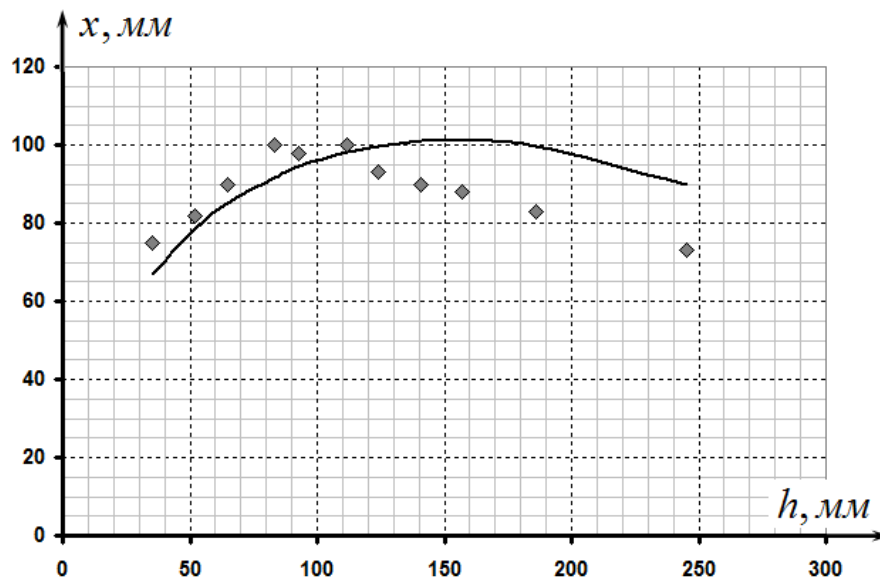
Часть 3.

3.1 В данной части высота H отсчитывается от уровня нижнего края струи. Эта конструкция моделирует сосуд, в котором высота уровня воды постоянна.

3.2 Результаты измерений приведены в Таблице 3 и на графике полученной зависимости.

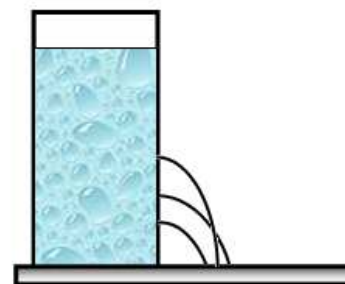
Таблица 3. Длина струи.

$h, \text{мм}$	$x, \text{мм}$
35	75
52	82
65	90
83	100
93	98
112	100
124	93
141	90
157	88
186	83
245	73



Также на графике приведен вид теоретической зависимости, построенный по формуле (2) с подобранным коэффициентом c . В данном случае также имеются заметные расхождения, особенно в области больших высот. Причины этого те же – форма струи заметно отличается от параболы. Максимальная длина струи получена при $h \approx 90 \text{ мм}$.

Результаты эксперимента показывают, что в области средних высот длина струи слабо зависит от высоты h , убывая как при уменьшении этой высоты, так и при ее увеличении. Поэтому правильный рисунок должен иметь следующий вид.

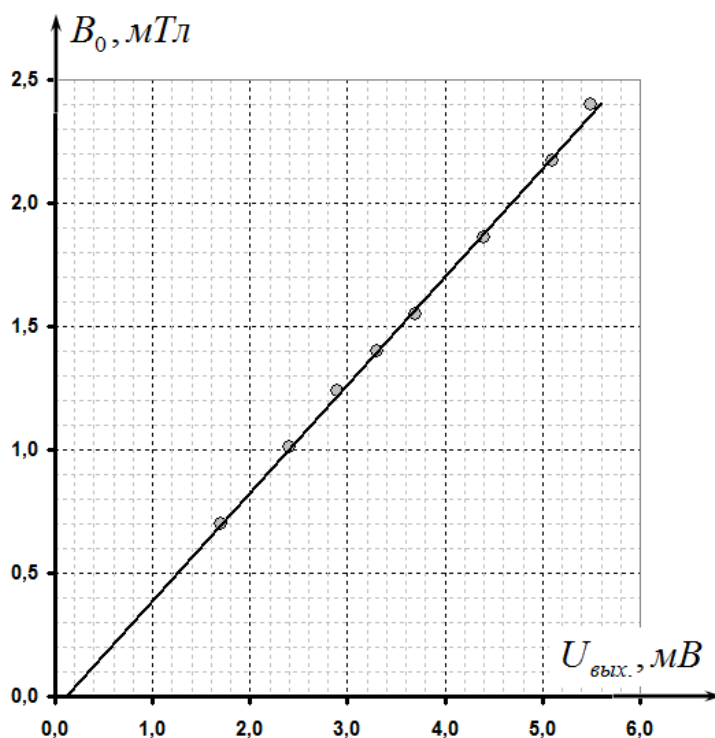


Задача 11-1 Намагниченный гвоздь.

1.2 Результаты измерений зависимости от рассчитанного значения индукции магнитного поля B_0 приведены в Таблице 1 и на графике.

Таблица 1. Градуировка датчика.

I, A	$B_0, мТл$	$U_{вых}, мВ$
0,45	0,70	1,70
0,65	1,01	2,40
0,80	1,24	2,90
0,90	1,40	3,30
1,00	1,55	3,70
1,20	1,86	4,40
1,40	2,17	5,10
1,55	2,40	5,50



Полученная зависимость является линейной. Параметры этой зависимости $B_0(U_{вых.}) = aU_{вых.} + b$, рассчитанные по МНК оказались равными

$$a = (0,44 \pm 0,01) \frac{мТл}{мВ}, \quad (1)$$
$$b = (-0,047 \pm 0,049) мТл$$

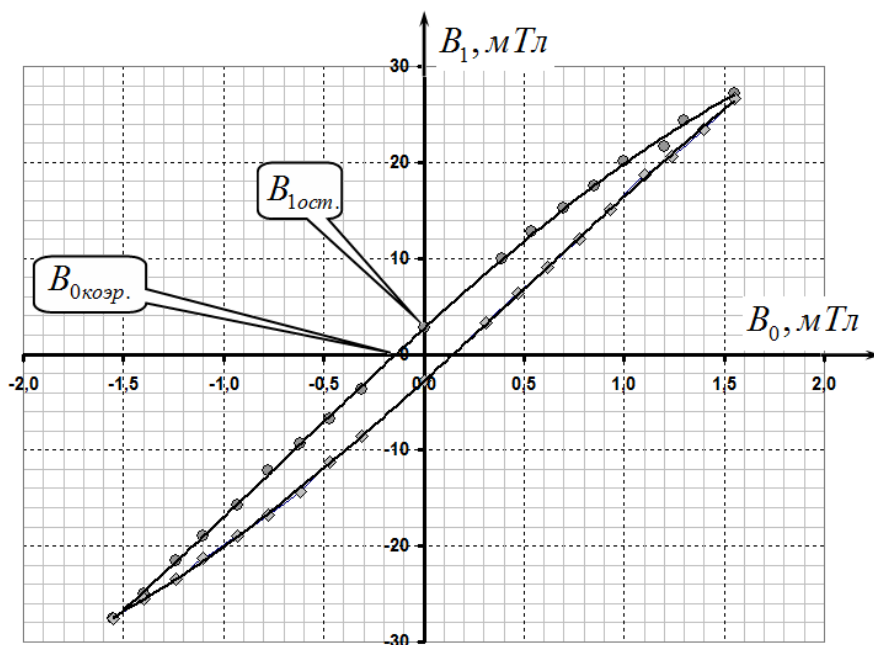
Величина сдвига b мала, ее погрешность превышает ее модуль, поэтому обосновано можно считать, что она равна нулю, а, следовательно, зависимость прямо пропорциональной.

Часть 2. Магнитные свойства гвоздя.

Результаты измерений зависимости индукции поля, создаваемого гвоздем B_1 , от индукции поля, создаваемого током в соленоиде (рассчитанного по формуле (1)) приведены в таблице 1 и на графике.

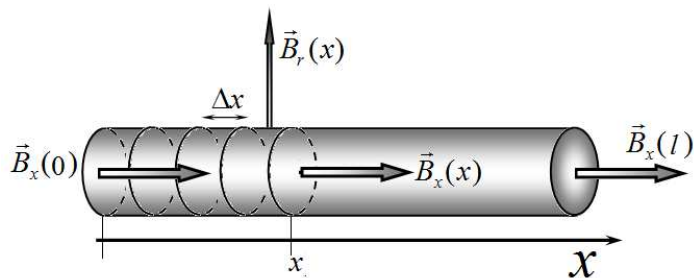
Таблица 2. Магнитные свойства гвоздя.

I, A	$U_{\text{вых.}} мВ$	$B, мТл$	$B_0, мТл$	$B_1, мТл$	I, A	$U_{\text{вых.}} мВ$	$B, мТл$	$B_0, мТл$	$B_1, мТл$
1,00	66,70	28,70	1,55	27,20	-1,00	-67,50	-29,00	-1,55	-27,50
0,85	59,50	25,60	1,30	24,30	-0,90	-62,60	-26,90	-1,40	-25,50
0,75	53,30	22,90	1,20	21,70	-0,80	-57,40	-24,70	-1,24	-23,50
0,65	49,00	21,10	1,00	20,10	-0,70	-51,90	-22,30	-1,10	-21,20
0,55	42,70	18,40	0,85	17,60	-0,60	-46,30	-19,90	-0,93	-19,00
0,45	37,00	15,90	0,70	15,20	-0,50	-40,90	-17,60	-0,78	-16,80
0,35	31,00	13,30	0,54	12,80	-0,40	-34,60	-14,90	-0,62	-14,30
0,25	23,90	10,30	0,39	9,90	-0,30	-27,50	-11,80	-0,47	-11,30
0,00	6,30	2,70	0,00	2,70	-0,20	-20,50	-8,80	-0,31	-8,50
-0,20	-9,00	-3,90	-0,31	-3,60	0,00	-6,60	-2,80	0,00	-2,80
-0,30	-16,70	-7,20	-0,47	-6,70	0,20	8,30	3,60	0,31	3,30
-0,40	-23,10	-9,90	-0,62	-9,30	0,30	16,10	6,90	0,47	6,40
-0,50	-30,30	-13,00	-0,78	-12,20	0,40	22,20	9,60	0,62	9,00
-0,60	-38,90	-16,70	-0,93	-15,80	0,50	29,80	12,80	0,78	12,00
-0,70	-46,70	-20,10	-1,10	-19,00	0,60	37,20	16,00	0,93	15,10
-0,80	-52,80	-22,70	-1,24	-21,50	0,70	46,00	19,80	1,10	18,70
-0,90	-61,30	-26,40	-1,40	-25,00	0,80	51,10	21,80	1,24	20,60
-1,00	-67,50	-29,00	-1,55	-27,50	0,90	57,90	24,90	1,40	23,50



По графику определяем остаточную намагниченность $B_{\text{ост.}} \approx 3 мТл$ и коэрцитивную силу $B_{\text{коэр.}} \approx 0,15 мТл$.

Часть 3. Магнитное поле внутри гвоздя. 3.1 Разобьем цилиндр на малые слои толщиной Δx . Мы можем измерить индукцию поля у боковой поверхности цилиндра B_{rk} и индукцию поля у его торцов. Магнитный поток через поверхность цилиндра, ограниченного сечением на расстоянии x от левого торца рассчитывается по формуле (и равен нулю по теореме о магнитном потоке)



$$-B_x(0)\pi R^2 + \sum_k B_{rk} 2\pi R \Delta x + B_x(x)\pi R^2 = 0. \quad (2)$$

При записи этого выражения мы считаем величину индукции в каждом поперечном сечении постоянной. Из этого уравнения получаем формулу для расчета индукции магнитного поля внутри гвоздя

$$B_x(x) = B_x(0) - \frac{2\Delta x}{R} \sum_k B_{rk}. \quad (3)$$

Результаты измерений индукции магнитного поля у поверхности гвоздя приведены в таблице 3.

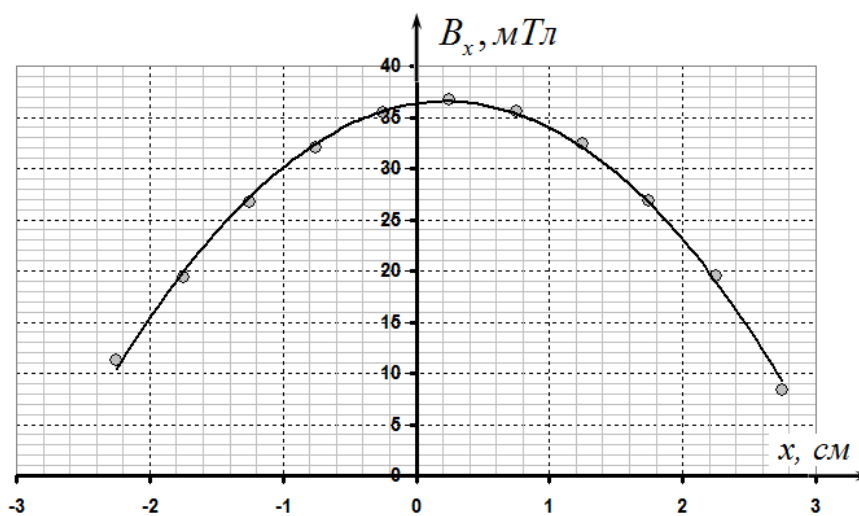
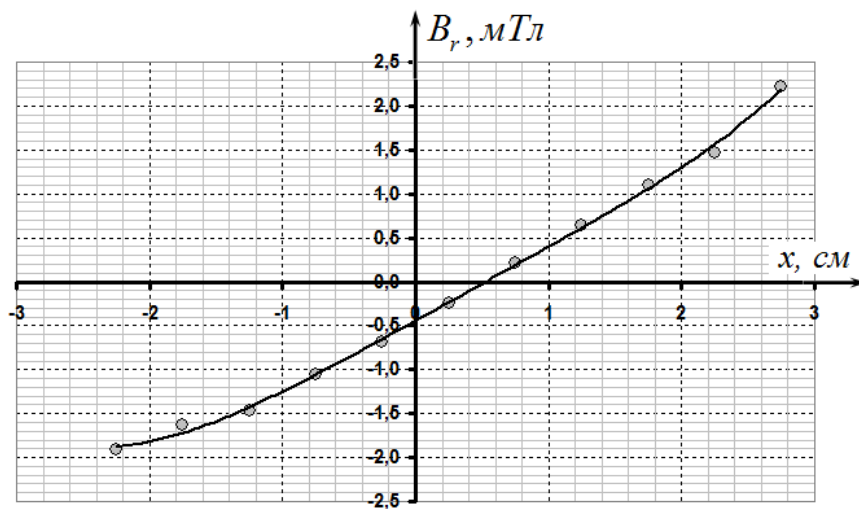
Таблица 3 Индукция поля гвоздя.

x , см	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
B_r , мТл		-1,98	-1,80	-1,58	-1,14	-0,70	-0,22
B_x , мТл	-1,67	ГВОЗДЬ					
B_r , мТл		-1,85	-1,45	-1,36	-0,97	-0,66	-0,26
B_r , мТл	21,0	141,3	243,6	336,2	402,5	445,4	460,6
Φ_x , мкВб	1,67	11,24	19,382	26,75	32,0	35,442	36,65
x , см	-2,75	-2,25	-1,75	-1,25	-0,75	-0,25	0,25
B_x , мТл	1,67	11,24	19,38	26,75	32,03	35,44	36,65

3,5	4	4,5	5	5,5	
0,26	0,57	1,06	1,50	2,24	
ГВОЗДЬ					2,99
0,18	0,70	1,14	1,45	2,20	
446,8	406,7	337,6	244,9	105,3	67,7
35,55	32,36	26,82	19,49	8,38	
0,75	1,25	1,75	2,25	2,75	
35,55	32,36	26,86	19,49	8,38	

В этой же таблице приведены результаты расчетов магнитного потока через поверхность цилиндра Φ_x и индукция магнитного поля на оси цилиндра B_x . Для расчета последней проведено последовательное суммирование слагаемых B_r .

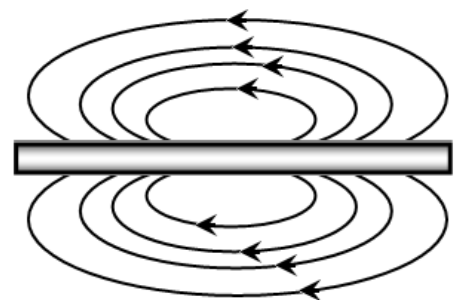
Графики зависимостей радиальной и осевой составляющих магнитного поля показаны на рисунках. Для наглядности начало отсчета смещено к центру гвоздя.



Зависимость осевой составляющей магнитного поля от координаты - квадратичная и может быть описана формулой $B(x) = B_0 - \beta(x - x_0)^2$

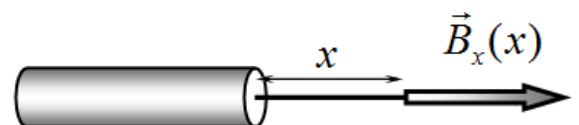
В таблице 3 приведены значения магнитного потока. Видно, что максимальное его значение составляет 460 мкВб, а «остаточное» значение 67 мкВб. То, что последнее отлично от нуля вполне может быть объяснено погрешностями измерений. Из условия равенства нулю магнитного потока, индукция магнитного поля на правом торце гвоздя должна равняться 8,4 мТл.

Схематическая картина силовых линий показана на рисунке.



Часть 4. Магнитное поле вне гвоздя.

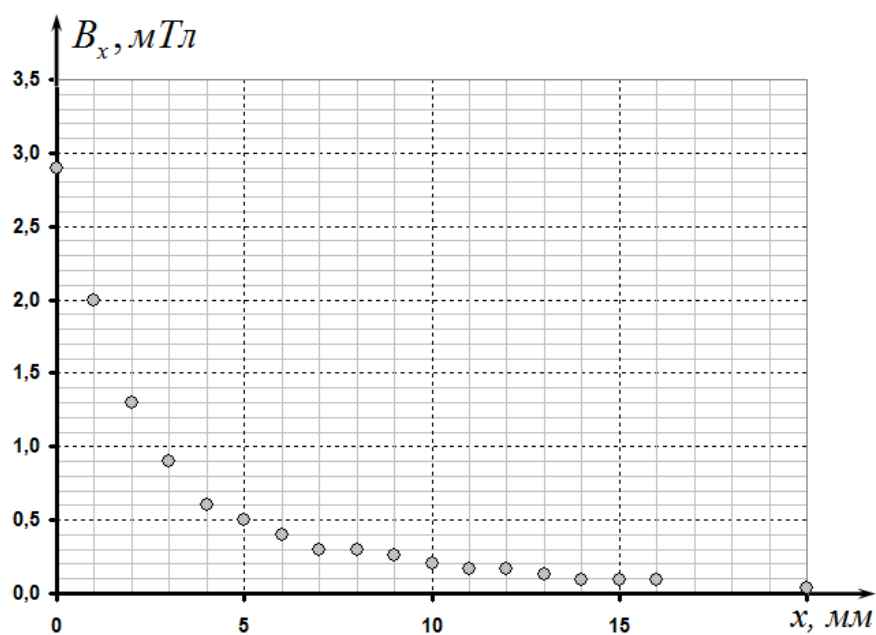
Индукция магнитного поля вне гвоздя является быстро убывающей функцией. В принципе она может быть рассчитана как результат суперпозиции полей, создаваемых отдельными кольцевыми токами на поверхности гвоздя.



Результаты измерений зависимости индукции поля от расстояния до центра гвоздя приведены в таблице 4 и на графике.

Таблица 4. Индукция поля на оси гвоздя.

$x, мм$	$B, мТл$
0	2,9
1	2
2	1,3
3	0,9
4	0,6
5	0,5
6	0,4
7	0,3
8	0,3
9	0,26
10	0,2
11	0,17
12	0,17
13	0,13
14	0,09
15	0,09
16	0,09
20	0,04



Задача 11-2 Упругий маятник.

Часть 1. Положения равновесия.

1.1 В положении равновесия сумма моментов сил упругости и силы тяжести равна нулю, поэтому справедливо уравнение (в СИ)

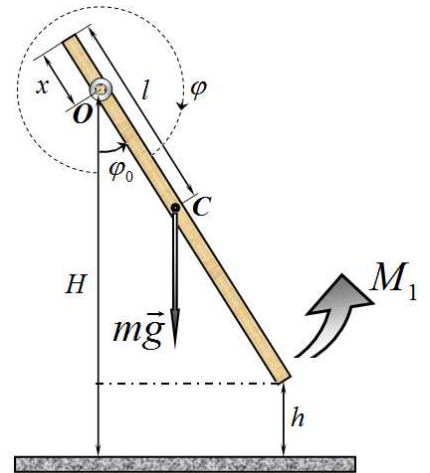
$$K\varphi = mg(l-x)\sin\varphi_0. \quad (1)$$

Если разделить это уравнение на введенную единицу момента силы $M_0 = mgl$, то получим

$$k\varphi = \left(1 - \frac{x}{l}\right)\sin\varphi_0 \quad (2)$$

В этом уравнении удобно перейти к углу закручивания, делая подстановку $\varphi_0 = 2\pi n - \varphi$. В результате получим

$$\frac{k}{1 - \frac{x}{l}}\varphi = -\sin\varphi \quad (3)$$



Это уравнение допускает простую графическую интерпретацию³. Построим схематически графики функций $y_1 = -\sin\varphi$ (перевернутая синусоида) и

$y_2 = \frac{k}{1 - \frac{x}{l}}\varphi$ (прямая), которые

пропорциональны моментам сил тяжести и упругости.

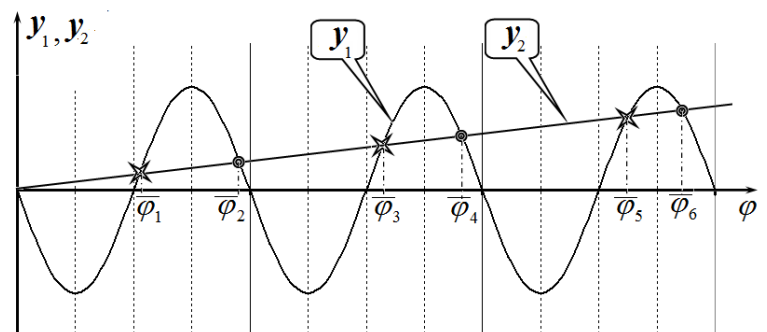
Абсциссы точек пересечения графиков этих функций являются корнями уравнения (3). Не сложно доказать, что, что все «нечетные» положения равновесия являются неустойчивыми (на рис. они отмечены звездочками), поэтому реализовываться могут только «четные» корни (отмеченные кружками).

Чтобы оценить число возможных устойчивых положений равновесия, заметим, что при максимальном n , корень близок⁴ к $\bar{\varphi}_n \approx 2\pi n - \frac{\pi}{2}$, поэтому должно выполняться условие

$$\frac{k}{1 - \frac{x}{l}}\left(2\pi n - \frac{\pi}{2}\right) < 1,$$

из которого следует оценка

$$n_{\max} < \frac{1 - \frac{x}{l}}{2\pi k}. \quad (4)$$



³ Очевидно, что каждому положительному корню этого уравнения соответствует равный ему по модулю отрицательный корень. Физический смысл этого – можно закручивать в обе стороны, от этого ничего не изменяется!

⁴ А положение линейки близко к горизонтальному!

1.2 – 1.3 Для определения коэффициента кручения можно воспользоваться уравнением (2). Угол положения равновесия $\bar{\varphi}_{0n}$ можно рассчитать следующим образом. Из рисунка следует, что

$$\cos \bar{\varphi}_{0n} = \frac{H - h}{l - x}. \quad (5)$$

Здесь все величины легко измеряемы. Так как все углы равновесия меньше прямого, то

$$\bar{\varphi}_{0n} = \arccos \frac{H - h}{l - x}. \quad (6)$$

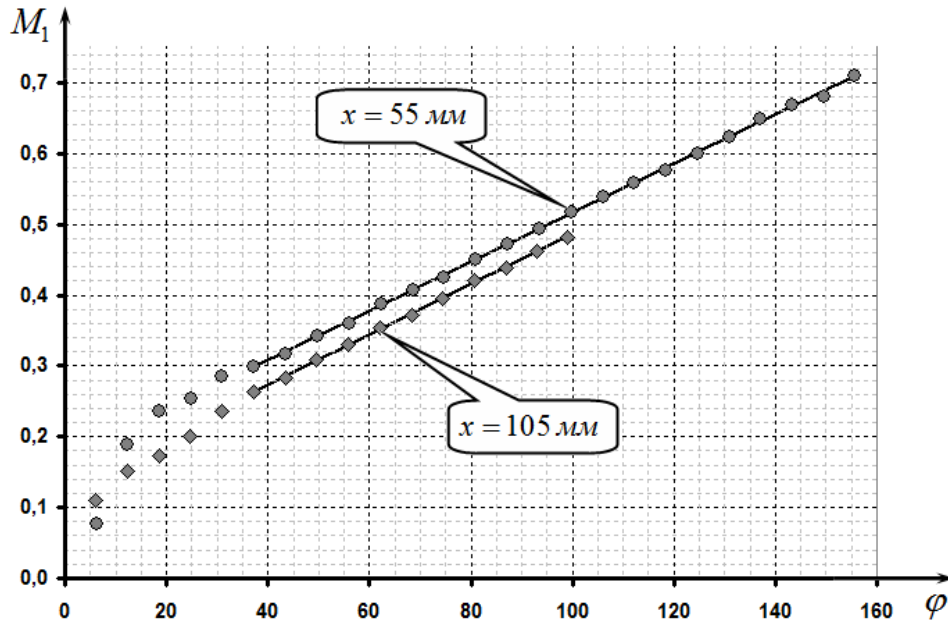
Соответствующий угол закручивания рассчитывается по формуле

$$\bar{\varphi}_n = 2\pi n - \bar{\varphi}_{0n}. \quad (7)$$

Проведя расчеты по этим формулам можно построить график зависимости момента силы тяжести (и равному ему моменту силы упругости) $M_1 = (1 - \frac{x}{l}) \sin \varphi_0$ от угла закручивания φ . В соответствии с уравнением (2) эта зависимость имеет вид $M_1 = k\varphi$, поэтому коэффициент наклона графика этой зависимости равен искомому коэффициенту кручения. Результаты измерений и необходимых расчетов приведены в таблице 1. Для обоснования достоверности проведенного анализа дополнительно проведены измерения и при $x = 55 \text{ мм}$.

Таблица 1.

$x=55 \text{ мм}$						$x=105 \text{ мм}$				
n	$h, \text{ мм}$	$\cos \varphi_0$	φ_0	φ	M	$h, \text{ мм}$	$\cos \varphi_0$	φ_0	φ	M
1	67	0,994	0,106	6,18	0,078	123	0,974	0,230	6,05	0,111
2	77	0,966	0,261	12,31	0,189	130	0,951	0,315	12,25	0,151
3	84	0,946	0,329	18,52	0,236	135	0,934	0,364	18,49	0,174
4	87	0,938	0,354	24,78	0,254	142	0,911	0,424	24,71	0,201
5	93	0,921	0,400	31,02	0,285	153	0,875	0,505	30,91	0,236
6	96	0,913	0,421	37,28	0,299	163	0,843	0,569	37,13	0,263
7	100	0,901	0,448	43,53	0,317	172	0,813	0,621	43,36	0,284
8	106	0,885	0,485	49,78	0,341	184	0,774	0,686	49,58	0,309
9	111	0,870	0,515	56,03	0,360	196	0,734	0,746	55,80	0,331
10	119	0,848	0,559	62,27	0,388	210	0,689	0,811	62,02	0,354
11	125	0,831	0,590	68,53	0,407	223	0,646	0,869	68,25	0,372
12	131	0,814	0,620	74,78	0,425	241	0,587	0,944	74,45	0,395
13	140	0,789	0,662	81,02	0,450	265	0,508	1,038	80,64	0,420
14	149	0,763	0,702	87,26	0,473	285	0,443	1,112	86,85	0,437
15	158	0,738	0,741	93,51	0,494	322	0,321	1,244	93,00	0,462
16	169	0,707	0,785	99,75	0,517	370	0,164	1,406	99,12	0,481
17	180	0,676	0,828	105,99	0,539					
18	190	0,648	0,866	112,23	0,557					
19	201	0,617	0,906	118,47	0,576					
20	216	0,575	0,959	124,71	0,599					
21	234	0,524	1,019	130,93	0,623					
22	255	0,465	1,087	137,14	0,648					
23	276	0,406	1,153	143,36	0,669					
24	290	0,366	1,196	149,60	0,681					
25	335	0,239	1,329	155,75	0,710					



На рисунке показаны графики полученных зависимостей. Видно, что малых углах закрутки зависимости не линейны. Однако уже при $n > 5$ экспериментальные точки практически точно ложатся на прямые линии. Это подтверждает применимость закона Гука с некоторой постоянной составляющей к моменту сил упругости. Коэффициенты наклона графиков (т.е. коэффициенты кручения), рассчитанные по МНК, оказались равными

$$\text{для } x = 55 \text{ мм:} \quad k = (3,47 \pm 0,04) \cdot 10^{-3}$$

$$\text{для } x = 105 \text{ мм:} \quad k = (3,53 \pm 0,05) \cdot 10^{-3}$$

Таким образом, в пределах погрешностей полученные значения оказались равными.

Заметим, что оценки числа возможных положений равновесий оказываются завышенными. Однако, если уточнить постоянную составляющую в моменте силы, то оценка дает правильное значения числа возможных состояний.

Часть 2. Колебания.

2.1 Теоретический.

Запишем уравнение динамики для маятника (на основе уравнения (1)):

$$I\beta = K\varphi - mg(l-x)\sin\varphi. \quad (5)$$

Здесь β - угловое ускорение, I - постоянный коэффициент (момент инерции). Так как колебания происходят вблизи положений равновесия, то можно представить

$$\varphi = \varphi_0 + \delta, \quad (6)$$

где φ_0 - угол отклонения в положении равновесия, $\delta(t)$ - малое отклонение от него.

Тогда уравнение (5) преобразуется к виду (с учетом $\sin(\varphi_0 + \delta) \approx \sin\varphi_0 + \cos\varphi_0 \cdot \delta$):

$$\begin{aligned} I\beta &= K\varphi - mg(l-x)\sin\varphi = \\ &= (K\varphi_0 - mg(l-x)\sin\varphi_0) + K\delta - mg(l-x)\cos\varphi_0 \cdot \delta \end{aligned} \quad (7)$$

Первая скобка в данном выражении обращается в нуль, так как определяет условие равновесия, поэтому дальнейшие преобразования очевидны:

$$\beta = -\frac{mg(l-x)}{I} \left(\cos \varphi_0 - \frac{K}{mgl \left(1 - \frac{x}{l}\right)} \right) \delta. \quad (8)$$

Это есть уравнение гармонических колебаний, период которых

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mg(l-x)} \cdot \frac{1}{\cos \varphi_0 - \frac{K}{mgl \left(1 - \frac{x}{l}\right)}}} = \frac{T_0}{\sqrt{\cos \varphi_0 - \frac{k}{1 - \frac{x}{l}}}}. \quad (9)$$

Эта формула совпадает с формулой, приведенной в условии. Величина T_0 имеет смысл

периода колебаний маятника без резинки, параметр $\gamma = \frac{k}{1 - \frac{x}{l}}$.

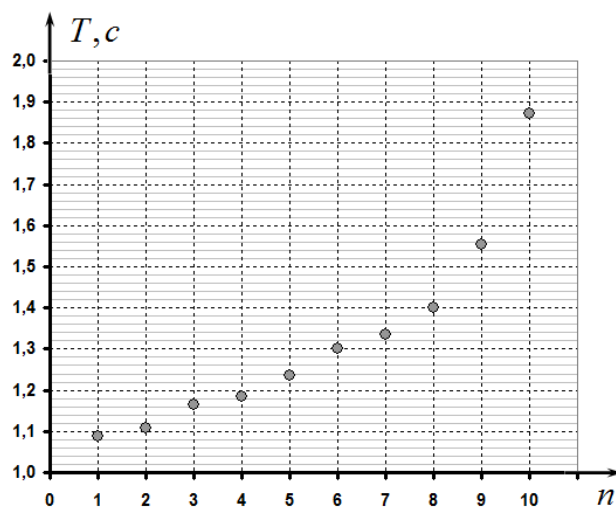
Полученное выражение допускает простую экспериментальную проверку.

2.2 Измерительный.

Результаты измерений периодов колебаний от числа оборотов закручивания резинки приведены в таблице 3 и на графике. Отметим, что проводить на этом графике сглаживающую кривую смысла нет, так как аргумент этой функции дискретный.

Таблица 3. Периоды колебаний.

n	$h, \text{мм}$	$T, \text{с}$	$\cos \varphi_0$	$T^{-2}, \text{с}^{-2}$
1	285	1,088	0,883	0,845
2	299	1,108	0,837	0,815
3	310	1,164	0,800	0,738
4	325	1,184	0,750	0,713
5	341	1,236	0,697	0,655
6	358	1,300	0,640	0,592
7	377	1,334	0,577	0,562
8	394	1,400	0,520	0,510
9	423	1,554	0,423	0,414
10	438	1,872	0,373	0,285



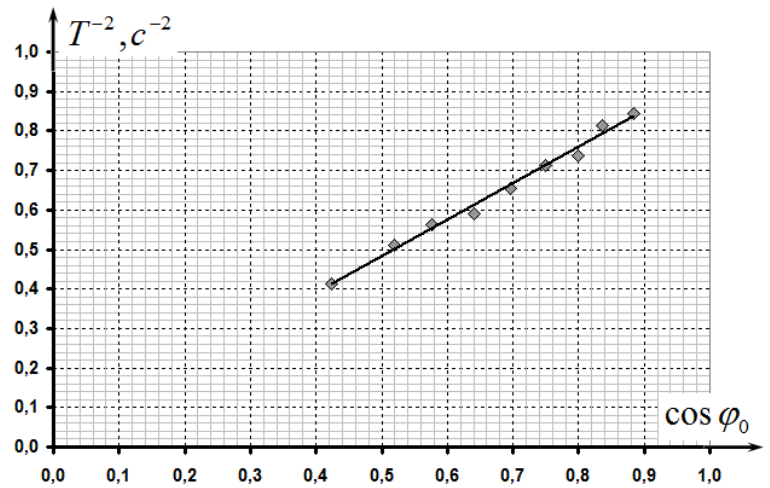
2.3 Расчетный.

Для проверки формулы (2) из условия задачи необходимо построить зависимость величины T^{-2} от $\cos \varphi_0$. Расчеты этих величин также приведены в Таблице 3. График полученной зависимости показан на рисунке.

Действительно, получилась линейная зависимость. Коэффициенты этой зависимости ($T^{-2} = a \cdot \cos \varphi_0 + b$), рассчитанные по МНК оказались равными

$$a = (0,92 \pm 0,07)c^{-2}$$

$$b = (0,02 \pm 0,05)c^{-2}$$



Сравнивая с исходной (не линеаризованной) формой уравнения определим искомые параметры

$$T_0 = \frac{1}{\sqrt{a}} = 1,04c, \quad \gamma = \frac{b}{a} = 0,022. \quad (10)$$

Отметим, что провести сравнение с теоретическим значением параметра γ не представляется возможным, из-за большой погрешности его экспериментального значения.