

Решения задач.

9 класс.

Задача 9.1 Отражение.

Часть 1. Механическая

Найдем зависимость скорости шарика от его координаты. Запишем уравнение второго закона Ньютона для движущегося шарика

$$ma = -\beta V, \quad (1)$$

и подставим в него выражения для мгновенных скорости и ускорения

$$m \frac{\Delta V}{\Delta t} = -\beta \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (2)$$

После сокращения на Δt получим

$$m\Delta V = -\beta\Delta x. \quad (3)$$

Данное выражение справедливо не только для малых промежутков времени, но и для любых конечных интервалов (что доказывается простым суммированием по малым промежуткам), поэтому

$$V - V_0 = -\frac{\beta}{m}(x - x_0) \Rightarrow V = V_0 - \frac{\beta}{m}(x - x_0). \quad (4)$$

Таким образом, скорость линейно убывает с ростом пройденного пути. Очевидно, что формула (4) справедлива только для положительных значений модуля скорости. Подставим значение

$\beta = \frac{mV_0}{5a}$ и получим окончательный вид:

$$V = V_0 - \frac{V_0}{5a}(x - x_0) \quad (5)$$

При движении шарика от стенки, формула (5) определяет искомую функцию в виде

$$V = V_0 - \frac{V_0}{5a}(x - a), \quad (a < x < 6a) \quad (6)$$

Для построения графика удобно эту функцию представить в относительных единицах

$$\frac{V}{V_0} = 1 - \frac{1}{5} \left(\frac{x}{a} - 1 \right), \quad \left(1 < \frac{x}{a} < 6 \right) \quad (7)$$

График этой функции представляет отрезок прямой AB .

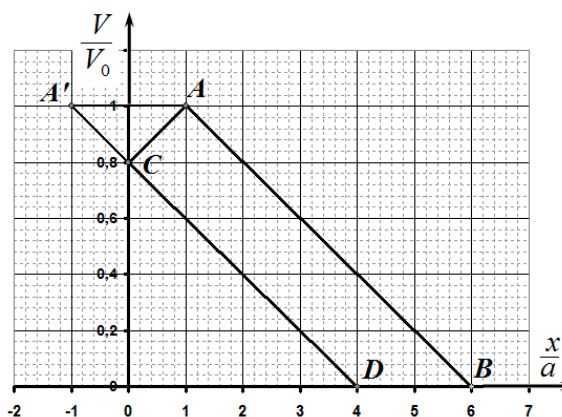
В том случае, когда начальная скорость шарика направлена к стенке, то до удара зависимость скорости от координаты определяется выражением

$$\frac{V}{V_0} = 1 + \frac{1}{5} \left(\frac{x}{a} - 1 \right), \quad \left(0 < \frac{x}{a} < 1 \right). \quad (8)$$

Этот участок на графике изображается отрезком AC . После отражения от стенки направление вектора скорости изменится на противоположное, поэтому вид функции изменится (отрезок CD на графике):

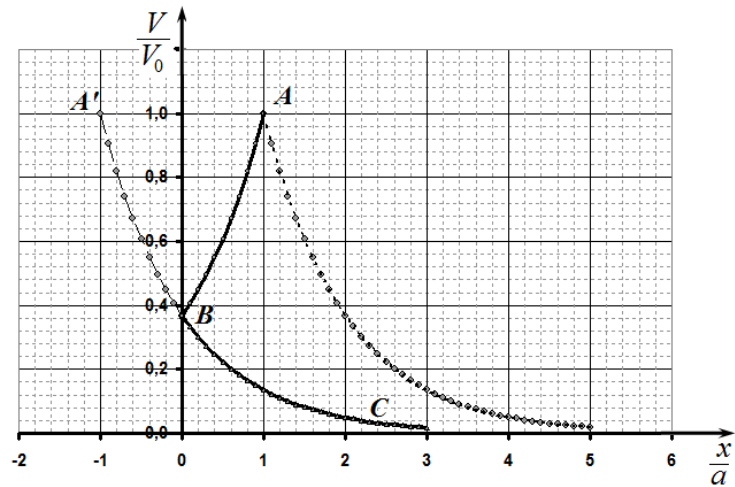
$$\frac{V}{V_0} = \frac{4}{5} - \frac{x}{5a}, \quad \left(0 < \frac{x}{a} < 4 \right). \quad (9)$$

График зависимости скорости шарика от координаты при отражении от стенки можно также



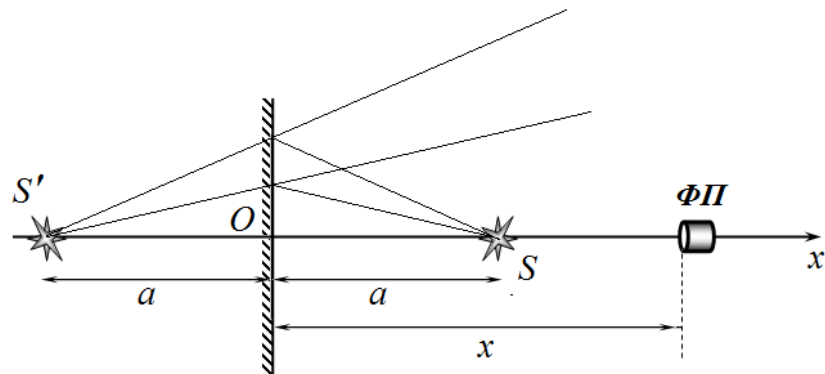
получить «отражением» графика движения в положительном направлении. Можно также «отразить» начальную точку A (ее «изображение» - A') и провести от нее исходный график – отрезок $A'CD$.

1.2 Для построения требуемого графика проще воспользоваться методом «отражения». До удара о стенку график зависимости является отражением исходного графика относительно прямой $x = a$ (участок AB), а после удара – графиком исходной зависимости, сдвинутым влево на величину $2a$. Можно также отразить начальную точку $A \rightarrow A'$



Часть 2. Оптическая

2.1 Построение хода лучей при отражении в плоском зеркале хорошо известно и комментариев не требует. Изображение будет находиться «зеркально симметрично» на расстоянии a за зеркалом.

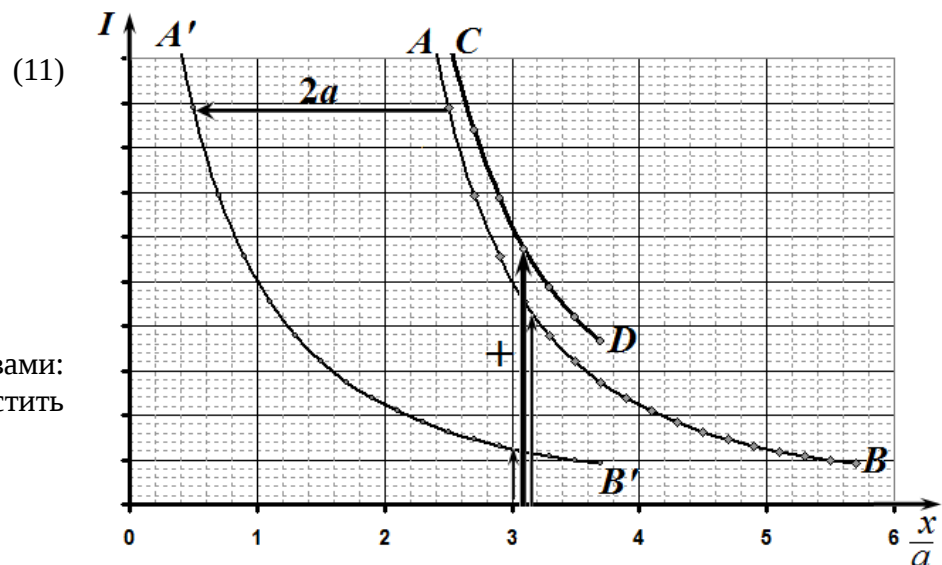


2.2 Фотоприемник будет воспринимать свет, исходящий как непосредственно от источника, так и отраженный от зеркала. Если зависимость интенсивности света от расстояния до источника r имеет вид $I_0(r)$, то при наличии зеркала суммарная интенсивность описывается функцией

$$I(x) = I_0(x - a) + I_0(x + a). \quad (10)$$

Или, аналогично, если исходная функция зависимости от координаты имеет вид $I_1(x)$ (представленный графически), то требуемая функция описывается выражением

$$I(x) = I_1(x) + I_1(x + 2a).$$



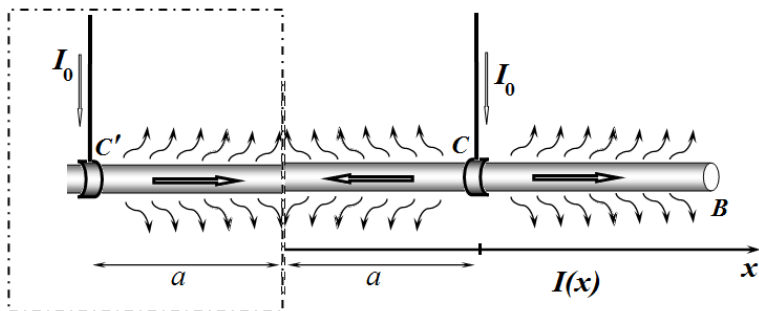
Иными словами: необходимо сместить

исходный график AB на $2a$ влево (кривая $A'B'$) и сложить их в области перекрытия (результат – кривая CD).

Часть 3. Электрическая.

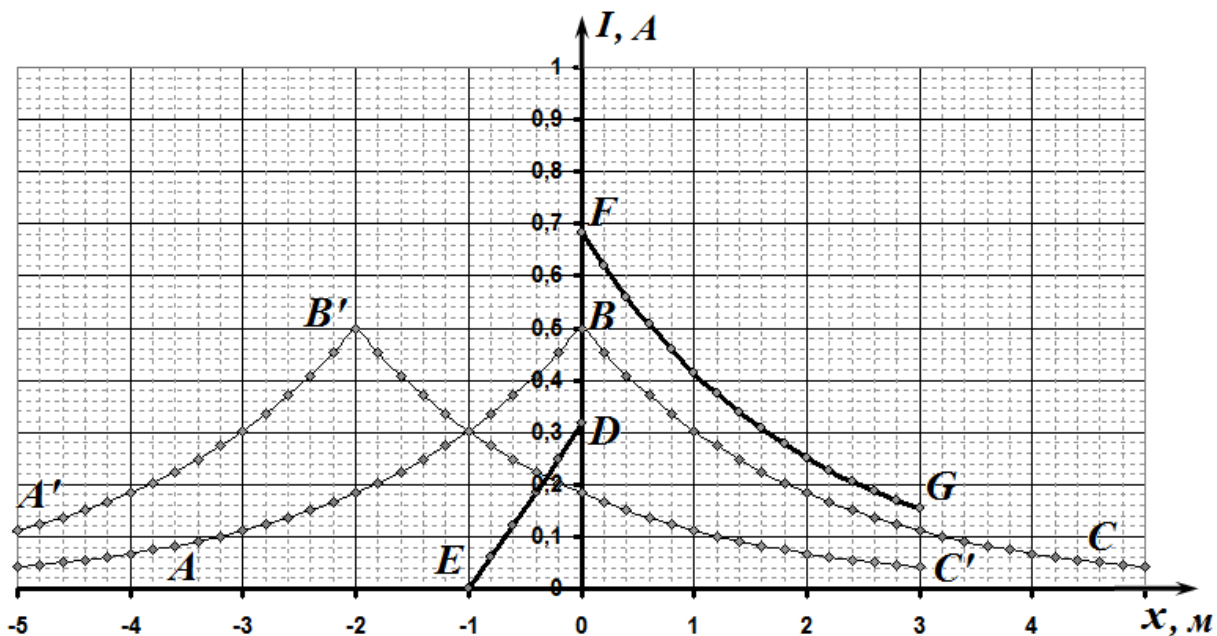
Обрыв кабеля приводит к тому, что ток перестает течь через место обрыва.

Этому же условию можно удовлетворить, если симметрично относительно места обрыва расположить еще один такой же источник тока, тогда суммарная сила тока в месте обрыва будет равна нулю. Для построения графика зависимости силы тока от координаты необходимо исходный график



Для

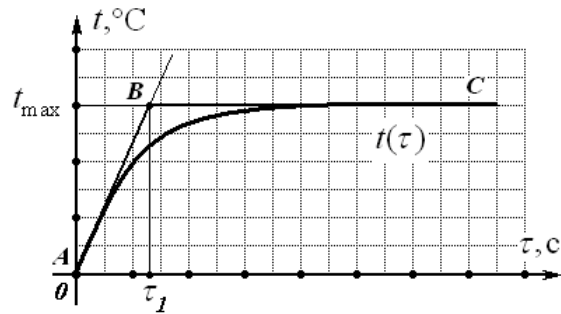
построения графика зависимости силы тока от координаты необходимо исходный график ABC сместить влево на $2a$ ($A'B'C'$). Затем в области между источником и точкой обрыва вычесть токи, так как здесь они текут в противоположных направлениях (ED), а вне этой области их сложить (FG). Результат такого построения показан на рисунке.



Задача 9.2 Предохранитель

Часть 1. Один предохранитель.

1.1 После замыкания цепи на предохранителе (резисторе) согласно закону Джоуля-Ленца начнет выделяться теплота, которая будет постепенно разогревать предохранитель до предельной температуры. График зависимости температуры предохранителя от времени $t(\tau)$ приведен в условии.



В переходном режиме температура предохранителя увеличивается. При этом часть теплоты идет на нагревание предохранителя ($Q_1 = cm\Delta t$), а часть (Q_2) «уходит» через боковую поверхность предохранителя в окружающую среду.

В стационарном режиме температура предохранителя установится, достигнув предельного значения t_{\max} , и далее перестанет нарастать, т.е. можно также назвать равновесной температурой. Действительно, по мере роста температуры резистора будет увеличиваться поток теплоты в окружающее пространство через его боковую поверхность, тогда как мощность тепловыделения будет оставаться постоянной. В этом режиме часть теплоты, идущая на нагревание предохранителя, равна нулю ($Q_1 = 0$).

Таким образом, в стационарном (установившемся) режиме количество теплоты, выделяемой в резисторе за промежуток времени, должно быть равно количеству теплоты Q_2 , отдаваемому за этот же промежуток времени в окружающую среду (равенство мощностей)

$$I^2 R = \alpha S \Delta t = \alpha S t, \quad (1)$$

где $R = \rho \frac{l}{\pi a^2}$ – сопротивление резистора, $S = 2\pi a l$ – площадь его боковой поверхности, α – коэффициент теплоотдачи.

Используя (1), найдем искомую температуру t_{\max}

$$t_{\max} = \frac{\rho I^2}{2\alpha \pi^2 a^3}. \quad (2)$$

Отметим, что максимальная температура, до которой может разогреться предохранитель, обратно пропорциональна кубу его радиуса и пропорциональна квадрату силы тока.

Расчет для рассматриваемого предохранителя дает следующее значение

$$t_{\max} = \left(\frac{1,5 \cdot 10^{-8} \cdot (10)^2}{2 \cdot 8,5 \cdot 10^2 \cdot (3,14)^2 \cdot (1,0 \cdot 10^{-4})^3} \right) ^\circ\text{C} = 89^\circ\text{C}. \quad (3)$$

Для оценки времени τ_1 разогрева предохранителя до предельной температуры запишем уравнение теплового баланса в некоторый момент времени τ , когда его температура равна t

$$c \pi a^2 l \frac{\Delta t}{\Delta \tau} = I^2 \rho \frac{l}{\pi a^2} - \alpha 2\pi a l t = I^2 \rho \frac{l}{\pi a^2} - \alpha 2\pi a l t, \quad (4)$$

где Δt – приращение температуры предохранителя за малый промежуток времени $\Delta \tau$.

Заметим, что на графике зависимости $t(\tau)$ величина $\frac{\Delta t}{\Delta \tau}$ соответствует скорости нарастания температуры со временем в рассматриваемой точке.

Скорость нарастания температуры в начальный момент времени ($t = 0$) равна

$$\left(\frac{\Delta t}{\Delta \tau}\right)_0 = I^2 \frac{\rho}{\pi^2 c \gamma a^4}, \quad (5)$$

тогда точка пересечения прямой AB с горизонтальной прямой $t = t_{\max}$ будет соответствовать искомому значению τ_1 (см. рис. в условии). Таким образом,

$$\tau_1 = \frac{t_{\max}}{\left(\frac{\Delta t}{\Delta \tau}\right)_0} = \frac{c \gamma a}{2 \alpha}. \quad (6)$$

Запомним, время разогрева пропорционально радиусу предохранителя.

Подстановка численных значений для рассматриваемого предохранителя дает $\tau_1 = 0,40 \text{ с}$

1.2 Плавление предохранителя происходит в том случае, если максимальная температура, которой может достичь предохранитель, превысит его температуру плавления $t_{\text{пл}} = 2,3 \cdot 10^2 \text{ }^\circ\text{C}$.

Таким образом

$$t_{\max} = t_{\text{пл}} = \frac{\rho I_{\max 1}^2}{2 \alpha \pi^2 a^3} \Rightarrow I_{\max 1} = \sqrt{\frac{2 \alpha \pi^2 a^3 t_{\text{пл}}}{\rho}}. \quad (7)$$

Расчет

$$I_{\max 1} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,5 \cdot 10^2 \cdot 3,14^2 \cdot (1,0 \cdot 10^{-4})^3 \cdot (230)}{1,5 \cdot 10^{-8}}} \text{ (A)} = 16 \text{ A}. \quad (8)$$

Как следует из (7), максимальная сила тока I_{\max} возрастает пропорционально радиусу в степени $3/2$ $I \propto a^{3/2}$ - при заданной силе тока у предохранителя меньшего радиуса и сопротивление больше, и теплоотдача меньше!

Следовательно, при увеличении радиуса предохранителя в два раза сила тока, при которой он перегорит, возрастет в $\sqrt{8} = 2,83$ раза и станет равным $I_{\max 2} = 45 \text{ A}$.

Часть 2. Два предохранителя.

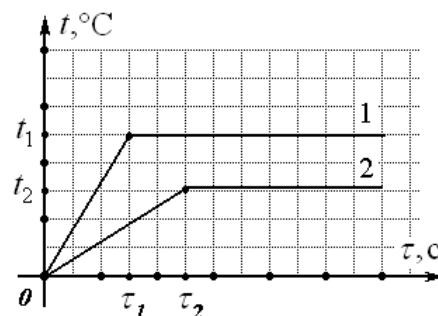
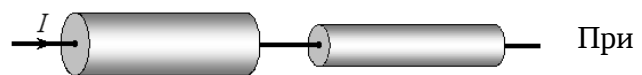
2.1 При последовательном включении предохранителей сила тока в них одинакова.

При медленном увеличении силы тока температура каждого из предохранителей в любой момент будет равна равновесной температуре. Так как у меньшего проводника эта температура выше, то он и перегорит первым.

Если же сила тока в цепи устанавливается очень быстро, то для того, чтобы определить какой предохранитель перегорит быстрее необходимо проанализировать зависимости температур обоих предохранителей от времени. Время разогрева у меньшего предохранителя меньше, поэтому зависимости температур от времени имеют вид, показанный на рисунке: 1- предохранитель меньшего радиуса, 2- предохранитель большего радиуса. Из рисунка видно, в любом случае температура первого предохранителя в любой момент больше, поэтому он всегда перегорит первым. После того, как он перегорит, цепь разорвется.

Таким образом, в этом случае составной резистор перегорит при силе тока в цепи

$$I_{\max 3} = I_{\max 1} = 16 \text{ A}. \quad (9)$$



2.2 При параллельном соединении напряжения на предохранителях равны. Поэтому в данном случае удобно выразить предельную (равновесную) температуру через напряжение на предохранителе. Из условия теплового равновесия, которое в данном случае имеет вид

$$\frac{U^2}{R} = \alpha 2\pi a l t, \quad (10)$$

следует, что эта температура равна

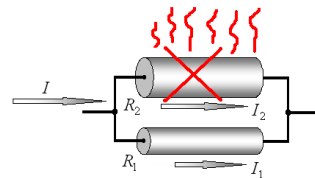
$$t_{\max} = \frac{U^2}{R \cdot 2\alpha \pi a l} = \frac{U^2}{\frac{\rho l}{\pi a^2} \cdot 2\alpha \pi a l} = \frac{U^2 a}{2\pi \alpha l^2 \rho}, \quad (11)$$

и пропорциональна радиусу предохранителя.

Следовательно, при медленном увеличении силы тока в цепи первым перегорит более толстый предохранитель. Это произойдет при токе через него силой $I_{\max 2} = 45 \text{ A}$. Сила тока в общей цепи в этом случае

должна быть равной $I_{\max 4} = \left(1 + \frac{1}{4}\right) I_{\max 2} = 56 \text{ A}$. После

перегорания второго предохранителя весь ток пойдет через первый, и его достаточно, чтобы сжечь и этот предохранитель!



Если в цепи мгновенно устанавливается некоторое значение силы тока, то необходимо анализировать зависимости температур резисторов от времени.

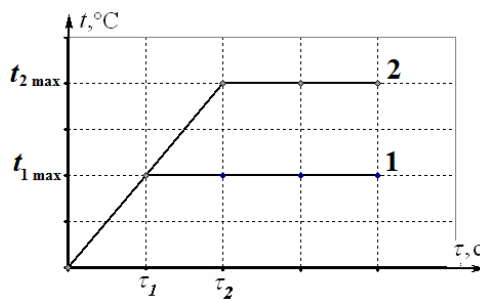
Из уравнения теплового баланса (4) следует, что время разогрева не зависит ни от силы тока, ни от напряжения на предохранителе и определяется формулой (6), которая утверждает, что время разогрева пропорционально радиусу предохранителя.

Таким образом, в данных условиях реализуется неожиданная ситуация: и максимальная температура и время разогрева одинаково зависят от радиуса предохранителя. Поэтому графики зависимостей температуры от времени будут совпадать до достижения одним из них предельной температуры.

При токе в цепи равном $I_0 = 5I_{\max 4} = 280 \text{ A}$, сила тока через первый предохранитель

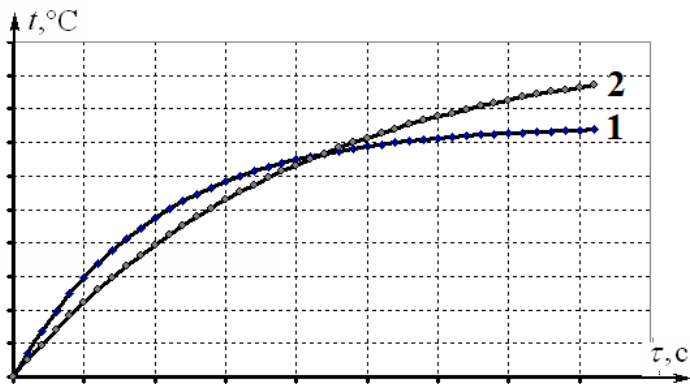
будет равна $I = \frac{1}{5} I_0 = 56 \text{ A}$. При такой силе тока, этот

предохранитель также расплавится, поэтому в рамках данной модели оба предохранителя должны расплавиться одновременно! Однако, в рамках более точной модели, которая показана на графике в условии задачи, следует, что в этом случае температура более толстого предохранителя все время будет немного выше, поэтому первым перегорит именно он!



2.3 Если укоротить длину первого предохранителя то его максимальная (равновесная) температура в соответствии с формулой (11) повысится, а время разогрева не изменится, поэтому схематические графики зависимостей температур от времени приобретут вид,

показанный на рисунке. Максимальная температура первого предохранителя также превысит температуру плавления. Поэтому в соответствии с графиком, в этом случае первым расплавится предохранитель меньшего радиуса.



Заметим, что и при точном расчете данный вывод подтверждается, что иллюстрируют графики точной зависимости предохранителей от времени.

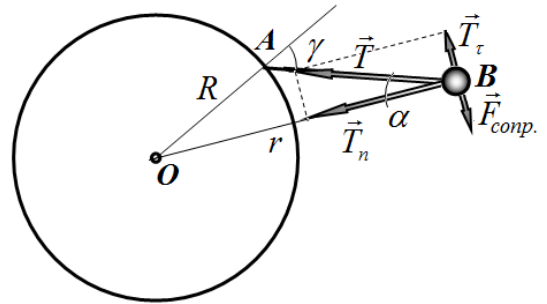
Задача 9-3 Праща.

Часть 1. Во всем виновато сопротивление воздуха!

1.1 Так как на шайбу действует сила сопротивления воздуха, то веревка должна отклониться от радиального направления на некоторый угол γ . В этом случае шайба будет двигаться по окружности некоторого радиуса r (отрезок OB), а ее вектор скорости направлен перпендикулярно этому отрезку. Обозначим угол между нитью и отрезком OB α . Так как длина нити равна радиусу диска, треугольник OAB является равнобедренным. Поэтому

$$\gamma = 2\alpha, \quad (1)$$

$$r = 2R \cos \alpha \quad (2)$$



Силу натяжения нити удобно разложить на две составляющих: радиальную T_n (сообщающую шайбе центростремительное ускорение) и касательную к траектории T_τ (которая компенсирует силу сопротивления воздуха).

На основании второго закона Ньютона запишем уравнения движения для этих двух составляющих

$$T \cos \alpha = m \omega^2 r \quad (3)$$

$$T \sin \alpha = \beta \omega r$$

Неизвестный параметр β можно определить из известной скорости установившегося падения шайбы (в этом режиме сила тяжести уравновешивается силой сопротивления воздуха):

$$\beta v_0 = mg \Rightarrow \beta = \frac{mg}{v_0}. \quad (4)$$

Разделив второе уравнение системы (2) на первое получим формулу для тангенса угла

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\beta}{m\omega} = \frac{g}{\omega v_0}. \quad (5)$$

Подстановка численных значений (с учетом $\omega = 2\pi n$) приводит к результату

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{g}{\omega v_0} = \frac{10}{2\pi \cdot 1 \cdot 50} \approx 0,032 \Rightarrow \alpha = 1,8^\circ. \quad (6)$$

Следовательно, искомый угол отклонения нити равен

$$\gamma = 2\alpha = 3,6^\circ. \quad (7)$$

Скорость движения шайбы равна

$$v = r\omega = 4\pi R n \cos \alpha = 13 \frac{M}{c}. \quad (8)$$

Заметим, что при таком угле отклонения $r = 2R \cos \alpha \approx 2,0 \text{ м}$, что в пределах точности исходных данных совпадает с удвоенным радиусом диска. То есть при таком угле для расчета скорости шайбы можно пренебречь отклонением нити от радиального направления.

1.2 Максимальная скорость шайбы будет достигнута, когда сила натяжения нити достигнет максимального значения. В этом случае в систему уравнений (4) подставим максимальное значение силы натяжения и формулу (2) для радиуса траектории:

$$\left. \begin{array}{l} T_{\max} \cos \alpha = m \omega^2 r \\ T_{\max} \sin \alpha = \frac{mg}{v_0} \end{array} \right\} \begin{array}{l} Kmg \cos \alpha = 2Rm^2 \cos \alpha \\ Kmg \sin \alpha = 2R \frac{mg}{v_0} \cos \alpha \end{array} \quad (9)$$

По-прежнему, справедливо (5), кроме того, из второго уравнения этой системы следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2R\omega}{Kv_0} \quad (10)$$

Приравнявая эти два выражения для тангенса угла α , получим формулу для максимальной угловой скорости вращения диска

$$\frac{2R\omega}{Kv_0} = \frac{g}{v_0\omega} \Rightarrow \omega_{\max} = \sqrt{\frac{Kg}{2R}} = 7,1 \text{ c}^{-1} \quad (11)$$

При этой угловой скорости угол отклонения нити будет еще меньшим, поэтому можно считать, что радиус траектории шайбы равен $r = 2R$. Следовательно, максимально возможная скорость шайбы равна

$$v_{\max} = 2R\omega_{\max} = \sqrt{2KRg} = 14 \frac{\text{M}}{\text{c}} \quad (12)$$

Часть 2. Во всем виновата сила трения.

2.1 Коэффициент трения можно найти из уравнения закона сохранения энергии (начальная кинетическая энергия шайбы равна работе силы трения):

$$\frac{mv_1^2}{2} = \mu mgS \quad (13)$$

Из которого следует

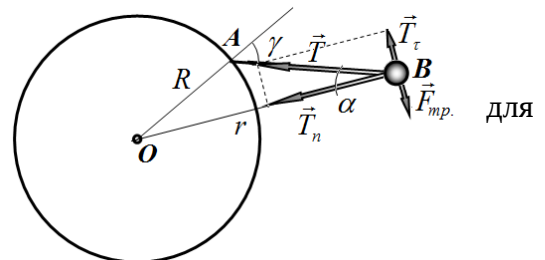
$$\mu = \frac{v_1^2}{2gS} = \frac{1}{2 \cdot 10 \cdot 0,12} = 0,42 \quad (14)$$

Этот же результат следует и из кинематических соотношений для равнозамедленного движения шайбы.

2.2 Главное отличие решения данной части задачи от предыдущей - в другом выражении для силы сопротивления, сейчас это постоянная по модулю сила трения. В остальном, решение принципиально не отличается от предыдущего. Рисунок действующих на шайбу сил отличается от рассмотренного ранее только обозначением силы сопротивления. Уравнения второго закона Ньютона шайбы в прежних проекциях будут иметь вид

$$\begin{array}{l} T \cos \alpha = m\omega^2 r \\ T \sin \alpha = \mu mg \end{array} \quad (15)$$

Здесь $F_{\text{тр.}} = \mu mg$ - сила трения, действующая на шайбу. Подставляя выражение (2) для радиуса траектории в первое уравнение этой системы, получим формулу для силы натяжения нити



$$T \cos \alpha = 2m\omega^2 R \cos \alpha \Rightarrow T = 2m\omega^2 R. \quad (16)$$

Теперь из второго уравнения системы (15) найдем значение угла α

$$2m\omega^2 R \sin \alpha = \mu mg \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\mu g}{2\omega^2 R} = \frac{\mu g}{8\pi^2 n^2 R}. \quad (17)$$

Подстановка численных значений приводит к следующему значению угла α .

$$\sin \alpha = \frac{\mu g}{8\pi^2 n^2 R} = \frac{0,42 \cdot 10}{8\pi^2 \cdot (0,30)^2 \cdot 1,0} = 0,59 \Rightarrow \alpha = 36^\circ \quad (18)$$

Следовательно, скорость шайбы будет равна

$$v = 2\pi n \cdot 2R \cos \alpha = 4\pi nR \cos \alpha = 3,0 \frac{M}{c}. \quad (19)$$

Можно, конечно, подставить в формулу выражения для косинуса (выразив его через синус):

$$v = 4\pi nR \cos \alpha = 4\pi nR \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = 4\pi nR \sqrt{1 - \left(\frac{\mu g}{8\pi^2 n^2 R}\right)^2}.$$

2.3 Расчет угла α при $n = 0,25 \frac{\text{об.}}{c}$ приводит к результату

$$\sin \alpha = \frac{\mu g}{8\pi^2 n^2 R} = \frac{0,42 \cdot 10}{8\pi^2 \cdot (0,25)^2 \cdot 1,0} = 0,85 \Rightarrow \alpha = 58^\circ \quad (20)$$

Этот угол превышает 45° , а угол отклонения нити $\gamma = 2\alpha$ становится больше 90° ! Чего быть не может – следовательно, нить будет частично намотана на диск.

Это приведет к иному решению. Рисунок действующих сил и расстояний в этом случае имеет иной вид. Система уравнений (15) остается неизменной, но формула для радиуса траектории (2) в данном случае неприменима.

Из системы уравнений (15) выразим тангенс угла α

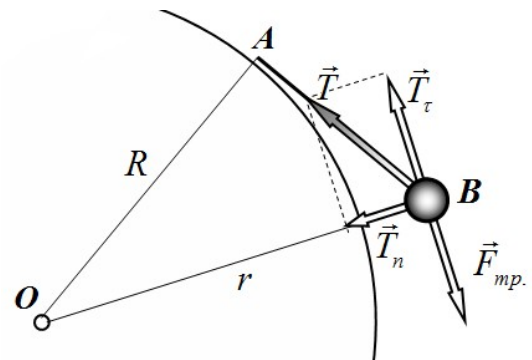
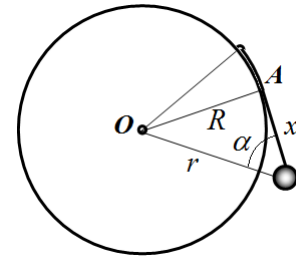
$$\text{tg } \alpha = \frac{\mu g}{\omega^2 r} \quad (21)$$

И приравняем его к выражению, следующему из прямоугольного (в данном случае) треугольника OAB

$$\text{tg } \alpha = \frac{R}{\sqrt{r^2 - R^2}} \quad (22)$$

Из полученного уравнения можно определить радиус траектории

$$\begin{aligned} \frac{R}{\sqrt{r^2 - R^2}} &= \frac{\mu g}{\omega^2 r} \Rightarrow r^2 = \left(\frac{\mu g}{\omega^2 R}\right)^2 (r^2 - R^2) \Rightarrow \\ r &= R \sqrt{\frac{\left(\frac{\mu g}{\omega^2 R}\right)^2}{\left(\frac{\mu g}{\omega^2 R}\right)^2 - 1}} \end{aligned} \quad (23)$$



Отметим, что формулы для радиусов траектории (23) и (2) стыкуются при $\alpha = 45^\circ$. В этом случае $\sin \alpha = \frac{\mu g}{2\omega^2 R} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{\mu g}{\omega^2 R} = \sqrt{2}$ и тогда из формулы (23) следует, что $r = R\sqrt{2}$

При заданном значении частоты вращения $n = 0,25 \frac{\text{об.}}{\text{с}}$ радиус траектории равен

$$\frac{\mu g}{\omega^2 R} = \frac{0,40 \cdot 10}{(2\pi \cdot 0,25)^2 \cdot 1,0} = 1,62 \Rightarrow r = R \frac{\sqrt{\left(\frac{\mu g}{\omega^2 R}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{\mu g}{\omega^2 R}\right)^2 - 1}} = 1,0 \cdot \sqrt{\frac{(1,62)^2}{(1,62)^2 - 1}} = 1,27 \text{ м.}$$

Соответственно, скорость шайбы равна

$$v = 2\pi n r = 2,0 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (24)$$

2.4 Если не заметить «подвоха» в пункте 2.3 и упрямо подставлять значения частоты вращения в формулу (17), то при заданном значении угловой скорости получим абсурдный результат:

$$\sin \alpha = \frac{\mu g}{8\pi^2 n^2 R} = \frac{0,40 \cdot 10}{8\pi^2 \cdot (0,20)^2 \cdot 1,0} = 1,25 \Rightarrow \alpha = ??? \quad (25)$$

Фактически этот пункт задачи является «подсказкой» и к предыдущему пункту. Поэтому расчет следует вести по формулам (23) –(24):

$$\frac{\mu g}{\omega^2 R} = \frac{0,40 \cdot 10}{(2\pi \cdot 0,20)^2 \cdot 1,0} = 2,53 \Rightarrow r = R \frac{\sqrt{\left(\frac{\mu g}{\omega^2 R}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{\mu g}{\omega^2 R}\right)^2 - 1}} = 1,0 \cdot \sqrt{\frac{(2,53)^2}{(2,53)^2 - 1}} = 1,09 \text{ м}$$

$$v = 2\pi n r = 1,4 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (26)$$

Задача 10.1 ЦУП

Часть 1

1.1 Пусть ω_3 – угловая скорость вращения Земли вокруг оси, а ω – угловая скорость вращения спутника. И пусть в начальный момент времени спутник пересекает экватор. За время одного оборота спутника ($T = \frac{2\pi}{\omega} \omega_3$) Земля повернется на угол $\frac{2\pi}{\omega} \omega_3$.

Если движение спутника и Земли происходит в одном направлении, то следующее пересечение экватора произойдет на:

$$\Delta\varphi = 2\pi - 2\pi \frac{\omega_3}{\omega} = 2\pi \left(1 - \frac{\omega_3}{\omega}\right) \quad (1)$$

восточнее (на рисунке — правее) предыдущего.

Если же спутник и Земля вращаются в разных направлениях, то за один оборот спутник сместится относительно Земли на:

$$\Delta\varphi = 2\pi + 2\pi \frac{\omega_3}{\omega} = 2\pi \left(1 + \frac{\omega_3}{\omega}\right) \quad (2)$$

в западном (левом) направлении. Т.е. в любом случае больше, чем на 360° .

Согласно рисунку 1 условия задачи, спутник смещается на 14 клеток (280°), т. е. движется по направлению вращения Земли.

1.2 Уравнение (1) позволяет найти угловую скорость вращения спутника:

$$280^\circ = \frac{14}{9} \pi = 2\pi \left(1 - \frac{\omega_3}{\omega}\right) \quad (3)$$

Таким образом:

$$\omega = \frac{9}{2} \omega_3 = 3,3 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1} \quad (4)$$

$$T_c = \frac{2}{9} T_3 = 5,3 \text{ ч} \quad (5)$$

Радиус орбиты определим, записав Второй закон Ньютона:

$$m\omega^2 r = G \frac{Mm}{r^2} \quad (6)$$

где M - масса Земли,

m - масса спутника.

Подставив $\omega = \frac{2\pi}{T}$ и $GM = gR_3^2$, получим:

$$\frac{4\pi^2}{T^2} r = g \frac{R_3^2}{r^2} \quad (7)$$

Тогда радиус орбиты:

$$r = \left(\frac{gR_3^2 T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = 1,6 \cdot 10^7 \text{ м} \quad (8)$$

Линейная скорость движения спутника:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 5,1 \cdot 10^3 \text{ м/с} \quad (9)$$

1.3 За половину периода, как следует из (1), спутник смещается относительно Земли на:

$$\Delta\varphi = \pi \left(1 - \frac{\omega_3}{\omega} \right) \quad (10).$$

Это и есть расстояние между двумя последовательными точками пересечения экватора. При уменьшении радиуса орбиты угловая скорость увеличивается. Следовательно, увеличивается и искомое расстояние.

Максимальное значение угловой скорости спутника достигается на орбите, проходящей в непосредственной близости к поверхности Земли. Записав Второй закон Ньютона:

$$m\omega_{\max}^2 R_3 = mg \quad (11),$$

получим:

$$\omega_{\max} = \sqrt{g / R_3} = 1,2 \cdot 10^{-3} \quad (12).$$

Тогда максимальное расстояние между двумя точками последовательного пересечения экватора:

$$\Delta\varphi = \pi \left(1 - \frac{\omega_3}{\omega_{\max}} \right) = 3,0 \text{ рад} = 169^\circ \quad (13).$$

Часть 2

2.1 Т.к. спутники одновременно пересекают линию экватора, то периоды их обращения по орбитам одинаковы, а значит, равны и радиусы орбит. Изображенные на рисунке 2 условия задачи траектории соответствуют спутникам,двигающимся по одной орбите в разных направлениях.

Если спутник двигается по направлению вращения Земли («сжатая» траектория), то расстояние, которое проходит спутник относительно Земли за один оборот, равно 180° (9 клеток). Согласно (1), угловая скорость вращения равна:

$$\omega = 2\omega_3 \quad (14).$$

Аналогично можно рассуждать, рассматривая движение второго спутника. Для него выражение (1) будет иметь вид:

$$\Delta\varphi = \pi \left(1 + \frac{\omega_3}{\omega} \right) \quad (15).$$

За один оборот этот спутник смещается относительно Земли на 27 клеток, т. е. на 540° . Подставляя это значение в (15), получим тот же ответ (14).

Таким образом, период обращения по орбите равен:

$$T = T_3 / 2 = 12 \text{ ч} \quad (16).$$

Радиус орбит спутников равен:

$$r = \left(\frac{gR_3^2}{\omega^2} \right)^{1/3} = 2,7 \cdot 10^7 \text{ м} \quad (17).$$

2.2 Пусть спутники встретились в точке A (рис. 1). Между ними будет возможна прямая связь, пока они не достигнут точек B и B' соответственно. В течение времени, необходимом для перемещения в точки C и C' , связь будет отсутствовать.

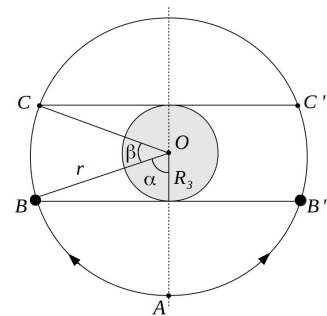


Рис. 1.

Таким образом, связь исчезает на время:

$$\Delta t_1 = \beta / \omega \quad (18)$$

с периодичностью

$$\Delta t_2 = T / 2 = 6ч \quad (19).$$

Угол β найдем из равнобедренного треугольника OBC .

$$\sin \frac{\beta}{2} = \frac{R_3}{r} \quad (20),$$

$$\beta = 0.48 \text{ рад} \quad (21).$$

Тогда время молчания:

$$\Delta t_1 = \frac{T \cdot 0.48}{2\pi} = 0.92ч = 55 \text{ мин} \quad (22).$$

Часть 3

Один из возможных траекторий изображены на рис. 2. Спутник двигающийся по направлению вращения Земли пересекает экватор через каждые а двигающийся против — через 300° . «Размах» траекторий в вертикальном направлении составляет 45° .

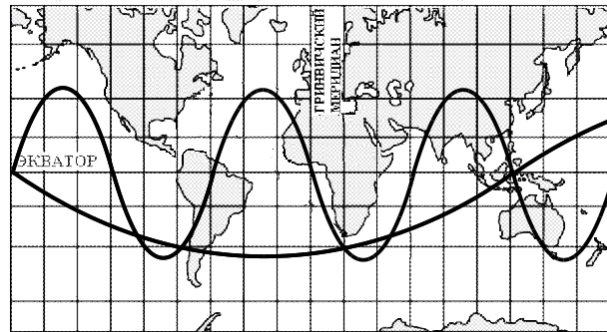


Рис. 2

Задача 10.2 Электронный газ и неоднородный проводник

1.1 Концентрация свободных электронов равна концентрации атомов меди, следовательно:

$$n_0 = \frac{N}{V} = \frac{D}{m_{\text{Cu}}}; \quad m_{\text{Cu}} = \frac{M}{N_A} \Rightarrow$$

$$n_0 = \frac{DN_A}{M}; \quad (1)$$

$$n_0 = \frac{8,9 \cdot 10^3 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{6,4 \cdot 10^{-2}} = 8,4 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}. \quad (1')$$

1.2. Тепловое равновесие означает, что электронному газу можно присвоить температуру, равную температуре меди. В результате:

$$\langle v_{\text{кв.}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m}}; \quad (2)$$

$$\langle v_{\text{кв.}} \rangle = \sqrt{\frac{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 1,2 \cdot 10^5 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (2')$$

1.3.
$$\langle v_{\text{кв.}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT_e}{m}} \Rightarrow T_e = \frac{m \langle v_{\text{кв.}} \rangle^2}{3k}; \quad (3)$$

$$T_e = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (2 \cdot 10^6)^2}{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}} = 8,8 \cdot 10^4 \text{ К}. \quad (3')$$

1.4.
$$p = n_0 k T_e; \quad (4)$$

$$p = 8,4 \cdot 10^{28} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 8,8 \cdot 10^4 = 1,0 \cdot 10^{11} \text{ Па} \quad (4')$$

Это очень большое давление. Однако при его выводе не учитывались положительные ионы кристаллической решетки, взаимодействие с которыми уменьшает давление электронного газа. Полученное значение является парциальным давлением электронного газа, к которому необходимо добавить давление электрического поля, создаваемого положительным зарядом, которое противоположно по знаку.

Часть 2.

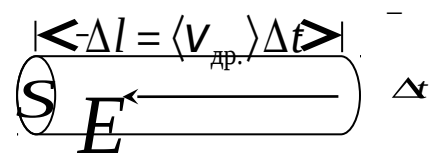
2.1. По определению сила тока: $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$; $\Delta q = \Delta N e$, где ΔN

количество электронов, способных за промежуток времени пересечь поперечное сечение проводника. $\Delta N = n_0 \Delta V$,

$\Delta V = S \Delta l = S \langle v_{\text{др.}} \rangle \Delta t$ (см. рисунок). В итоге:

$$\Delta q = n_0 e S \langle v_{\text{др.}} \rangle \Delta t \Rightarrow I = n_0 e S \langle v_{\text{др.}} \rangle \Rightarrow$$

$$\langle v_{\text{др.}} \rangle = \frac{I}{n_0 e S}; \quad (5)$$



$$\langle v_{др.} \rangle = \frac{1}{8,4 \cdot 10^{28} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1} = 7,4 \cdot 10^{-5} \frac{\text{М}}{\text{с}}. \quad (5')$$

Это очень малая скорость, особенно по сравнению со скоростью хаотического движения электронов. Тем не менее, с такой скоростью дрейфует много электронов, в результате этого получается заметный ток.

2.2. Для однородного поля:

$$E = \frac{U}{L}; \quad E = 1,0 \frac{\text{В}}{\text{м}}. \quad (6)$$

2.3. Средняя скорость равноускоренного движения из состояния покоя равна $\frac{1}{2}v_{\max}$ и совпадает со средней скоростью дрейфа: $\frac{1}{2}v_{\max} = \langle v_{др.} \rangle \Rightarrow$ (учитывая (5)):

$$v_{\max} = \frac{2I}{n_0 e S}. \quad (7)$$

С другой стороны: $v_{\max} = a\tau$, где ускорение: $a = \frac{eE}{m} = \frac{eU}{mL} \Rightarrow$

$$\frac{eU}{mL} \tau = \frac{2I}{n_0 e S} \Rightarrow I = \frac{n_0 e^2 \tau S}{2mL} U. \quad (8)$$

Сила тока пропорциональна напряжению, это и есть закон Ома. Сопротивление:

$$R = \frac{U}{I} \Rightarrow R = \frac{2mL}{n_0 e^2 \tau S}. \quad (9)$$

Сравнивая полученное выражение с формулой $R = \rho_1 \frac{L}{S}$, получим:

$$\rho_1 = \frac{2m}{n_0 e^2 \tau} \Rightarrow \tau = \frac{2m}{n_0 e^2 \rho_1}; \quad (10)$$

$$\tau = \frac{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}}{8,4 \cdot 10^{28} \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 1,7 \cdot 10^{-8}} = 5,0 \cdot 10^{-14} \text{ с}. \quad (10')$$

3.1. Сопротивление первого проводника: $R_1 = \rho_1 \frac{l_1}{S}$, второго – $R_2 = \rho_2 \frac{l_2}{S}$. Сила тока в

проводниках: $I_1 = \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{R_1} = \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{\rho_1 l_1} S$; $I_2 = \frac{\varphi_1 - 0}{R_2} = \frac{\varphi_1}{\rho_2 l_2} S$. Поскольку при последовательном

соединении сила тока в проводниках одинакова,

$$I_1 = I_2 \Rightarrow \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{\rho_1 l_1} S = \frac{\varphi_1}{\rho_2 l_2} S \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_0 \frac{\rho_2 l_2}{\rho_1 l_1 + \rho_2 l_2}. \quad (12)$$

При $l_1 = l_2$: $\varphi = \varphi_0 \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$; $\varphi_1 = 220 \cdot \frac{5,1 \cdot 10^{-7}}{1,7 \cdot 10^{-8} + 5,1 \cdot 10^{-7}} = 213 \text{ В}$.

3.2. Закон Ома: $I = \frac{\varphi_0 - \varphi}{R} \Rightarrow \varphi = \varphi_0 - I\rho \frac{l}{S}$. Зависимость потенциала φ от длины проводника

l линейная, φ равномерно убывает в медном проводнике от φ_0 до φ_1 , а в проводнике из константана от φ_1 до 0.

Напряженность поля в каждом проводнике постоянная, однако, на границе соединения

проводников претерпевает разрыв, в результате в проводнике из меди $E_1 = \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{l} = \frac{7,0}{l} \left(\frac{\text{В}}{\text{м}} \right)$, а

в проводнике из константана $E_2 = \frac{\varphi_1}{l} = \frac{213}{l} \left(\frac{\text{В}}{\text{м}} \right)$.

3.4. Совместим ось Ox с осью проводника, поместив начало оси на положительный конец.

Удельное сопротивление материала проводника изменяется по закону:

$$\rho = \rho_1 \left(1 + \beta \frac{x}{L} \right), \text{ где } \beta = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{5,1 \cdot 10^{-7}}{1,7 \cdot 10^{-8}} = 30. \quad (14)$$

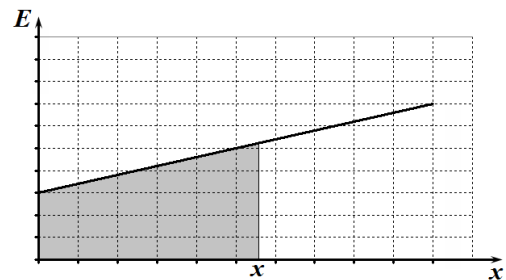
Так как сила тока постоянна в любом сечении проводника, то для плотности тока (которая также постоянна) можно записать

$$j = \frac{1}{\rho} E = \text{const}. \quad (15)$$

Откуда следует, что напряженность электрического поля изменяется по закону

$$E = j\rho = j\rho_1 \left(1 + \beta \frac{x}{L} \right). \quad (16)$$

В этой зависимости нам не известна плотность тока, которую можно найти, зная значения потенциалов на концах проводника. Построим график зависимости модуля напряженности от координаты. Площадь под графиком от точки $x = 0$ до некоторого значения x численно равна разности потенциалов между этими точками. Поэтому потенциал в точке с координатой x равен



$$\varphi(x) = U - \frac{1}{2}(E(0) + E(x)) \cdot x = U - \frac{1}{2} j \rho_1 \left(2 + \beta \frac{x}{L} \right) x. \quad (17)$$

Эта функция при $x = L$ должна обращаться в нуль, что и дает возможность определить неизвестную постоянную:

$$U - \frac{1}{2} j \rho_1 (2 + \beta) L = 0 \Rightarrow j = \frac{U}{\frac{1}{2} \rho_1 (2 + \beta) L}. \quad (18).$$

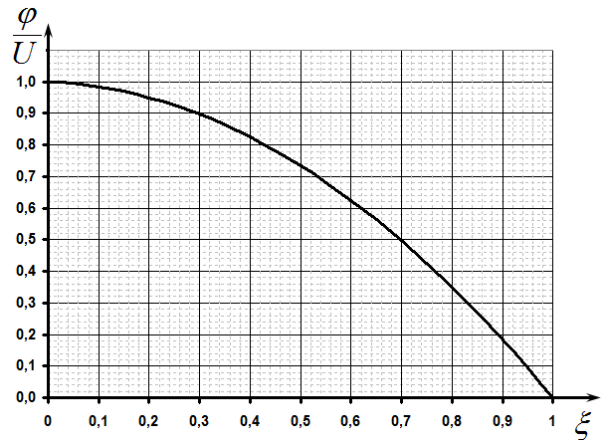
Таким образом, получаем окончательное выражение для распределения потенциала

$$\varphi(x) = U - \frac{1}{2} j \rho_1 \left(2 + \beta \frac{x}{L} \right) x = U - U \frac{\left(2 + \beta \frac{x}{L} \right) x}{(2 + \beta)L}. \quad (19)$$

Если обозначить $\xi = \frac{x}{L}$, то эта функция приобретает вполне удобоваримый вид банальной параболы (с учетом $\beta = 30$):

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= U \left(1 - \frac{(2 + \beta \xi) \xi}{(2 + \beta)} \right) = \\ &= U \left(1 - \frac{(2 + 30\xi) \xi}{32} \right). \end{aligned}$$

График этой функции показан на следующем рисунке.



Задача 10.3 Опыт Жана Перрена.

1.1 На частицу во вращающейся жидкости в радиальном направлении действуют сила вязкого трения (сила Стокса)

$F_C = 6\pi\eta R V$ и сила Архимеда $F_A = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0 \omega^2 r$. Эти силы

сообщают частице центростремительное ускорение $a = \omega^2 r$.

Пренебрегая изменением модуля скорости частицы относительно жидкости. На основании второго закона Ньютона запишем уравнение

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho \omega^2 r = 6\pi\eta R V + \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0 \omega^2 r, \quad (1)$$

Из которого находим скорость радиального движения частицы

$$V = \frac{R^2(\rho - \rho_0)\omega^2 r}{9\eta}. \quad (2)$$

Данная задача также может быть решена в неинерциальной вращающейся системе отсчета, связанной с жидкостью.

1.2 Так как скорость частицы пропорциональна квадрату ее радиуса, то при уменьшении радиуса в два раза, скорость уменьшится в 4 раза.

1.3 Подстановка численных значений приводит к результату

$$V = \frac{R^2(\rho - \rho_0)\omega^2 r}{9\eta} = \frac{(0,212 \cdot 10^{-6})^2 \text{ м}^2 \cdot (1,194 - 0,998) \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \left(2500 \frac{2\pi}{60}\right)^2 \text{ с}^{-2} \cdot 0,15 \text{ м}}{9 \cdot 1,005 \cdot 10^{-6} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}} \cdot \text{с}} =$$

$$= 0,010 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

1.3 Из формулы (2) следует, что скорость частицы пропорциональна расстоянию до оси вращения, поэтому движение такой частицы не является равномерным. Для оценки времени движения можно использовать среднее арифметическое скоростей движения частицы в начале и конце рассматриваемого интервала. Для упрощения численных расчетов зависимость скорости от расстояния запишем в виде

$$V(r) = V_0 \frac{r}{r_0}, \quad (4)$$

где V_0 - скорость частицы на расстоянии r_0 , причем в качестве этих величин используем численные значения, рассчитанные в п. 1.2.

Указанная оценка времени движения частицы дает

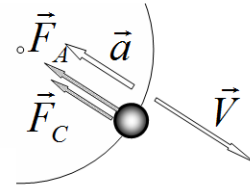
$$\tilde{t} = \frac{2l}{V_0 + V_0 \frac{r_0 + l}{r_0}} = \frac{2 \cdot 0,05}{0,010 \left(1 + \frac{20}{15}\right)} \approx 4,3 \text{ с} \quad (5)$$

Дополнение.

Точный расчет времени движения также может быть проведен. Из уравнения (4), записанного в дифференциальной форме следует, что закон движения имеет экспоненциальный вид

$$\frac{dr}{dt} = V_0 \frac{r}{r_0} \Rightarrow r = r_0 \exp\left(\frac{V_0}{r_0} t\right).$$

Из точного закона движения находим время смещения частицы на расстояние l :



$$\tilde{t} = \frac{r_0}{V_0} \ln \frac{r_0 + l}{r_0} = \frac{0,150}{0,010} \ln \frac{20}{15} = 4,32 \text{ с}.$$

Часть 2. Определение размеров частиц.

2.1 Для определения скорости опускания частиц достаточно в формуле (2) заменить центростремительное ускорение ускорением свободного падения. Расчет скорости в этом случае приводит к следующему значению

$$V = \frac{R^2(\rho - \rho_0)g}{9\eta} = \frac{(0,212 \cdot 10^{-6})^2 \text{ м}^2 \cdot (1,194 - 0,998) \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 9,81 \text{ с}^{-2} \cdot \text{м}}{9 \cdot 1,005 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}^2} \cdot \text{с}} =$$

$$= 9,55 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}}{\text{с}}$$
(6)

2.2 Скорость движения в данном случае постоянна, поэтому время движения рассчитывается по формуле

$$t = \frac{l}{V} = \frac{5,0 \cdot 10^{-2} \text{ м}}{9,55 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}}{\text{с}}} = 5,2 \cdot 10^3 \text{ с},$$
(7)

что примерно равно полутора часам.

Часть 3. Распределение частиц по высоте.

3.1 При постоянной температуре концентрация молекул газа пропорциональна давлению газа. Изменение давления с высотой связано с действием силы тяжести. В пределах слоя малой толщины можно считать давление (а также концентрацию и плотность) постоянным. Тогда для изменения ΔP давления при подъеме на высоту Δh справедливо выражение (где плотность газа выражена из уравнения состояния):

$$\Delta P = -\rho g \Delta h = -\frac{PM}{RT} g \Delta h.$$
(8)

Полагая $\frac{\Delta P}{P} = 1\% = 0,01$, из этой формулы находим высоту

$$(\Delta h)_{1\%} = \frac{\Delta P}{P} \cdot \frac{RT}{Mg} = 0,01 \frac{8,31 \cdot 293}{32 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81} = 77,6 \text{ м} \approx 80 \text{ м}.$$
(9)

3.2. На каждом слое толщиной $(\Delta h)_{1\%}$ концентрация убывает на 1%, следовательно, с увеличением числа слоев концентрация убывает в геометрической прогрессии. Найдем, сколько слоев толщиной $(\Delta h)_{1\%}$ необходимо пройти, чтобы, уменьшение концентрации составило 50%.

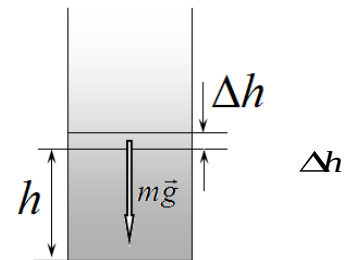
Для этого надо решить уравнение

$$0,99^N = 0,5 \Rightarrow N \approx 69$$
(10)

Следовательно, высота, на которой концентрация убывает в два раза, равна

$$h_{1/2} = 0,01N \cdot \frac{RT}{Mg} = 0,69 \frac{RT}{Mg}.$$
(11)

Это же выражение следует из барометрической формулы



$$P = P_0 \exp\left(-\frac{Mg}{RT} h\right) \Rightarrow h_{1/2} = \ln 2 \frac{RT}{Mg}.$$

3.3 Так как к частицам применимы законы идеального газа, то применима и формула (11). Только в ней молярную массу молекул надо заменить «молярной» массой частиц $M = N_A m$, где m - масса одной частицы. Кроме того, необходимо учесть действие силы Архимеда на частицу в воде, что приведет к появлению «эффективного» ускорения свободного падения g^* . С учетом этих оговорок, из формулы (11) следует выражение для расчета постоянной Авогадро

$$h_{1/2} = 0,69 \frac{RT}{Mg} = 0,69 \frac{RT}{N_A m g^*} \Rightarrow N_A = 0,69 \frac{RT}{m g^* h_{1/2}}. \quad (12)$$

Подстановка численных значений приводит к результату

$$\begin{aligned} N_A &= 0,69 \frac{RT}{m g^* h_{1/2}} = 0,69 \frac{RT}{\frac{4}{3} \pi R^3 (\rho - \rho_0) g h_{1/2}} = \\ &= 0,69 \frac{8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot 293 \text{К}}{\frac{4}{3} \pi (0,212 \cdot 10^{-6})^3 \text{ м}^3 \cdot (1,194 - 0,998) \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 9,81 \text{ с}^{-2} \cdot \text{м} \cdot 30 \cdot 10^{-6} \text{ м}} = \\ &= 7,23 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1} \approx 7 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1} \end{aligned} \quad (13)$$

Это значение немного превышает современное постоянной Авогадро, но это же было первое ее экспериментальное измерение!

Задача 11.1 Притяжение

Наиболее простой и общий путь решения данной задачи – использование уравнения динамики для движения центра масс, именно он выбран в качестве основного. Возможны и другие пути решения, некоторые из них приведены в качестве альтернативных вариантов.

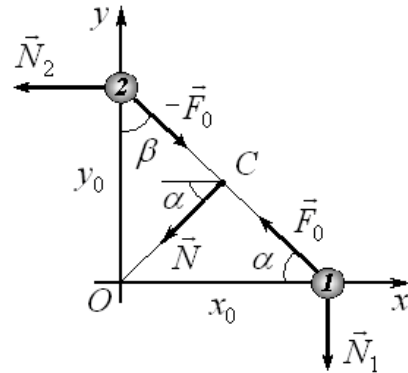
1. Изобразим силы, действующие на бусинки в процессе движения. Силы реакции осей N_1 и N_2 перпендикулярны соответствующим осям. Обозначим их равнодействующую через $N = N_1 + N_2$.

Поскольку каждая бусинка движется вдоль соответствующей оси, то ее ускорение в направлении, перпендикулярном данной оси отсутствует. Следовательно, справедливо равенство

$$N_1 = F_0 \sin \alpha$$

$$N_2 = F_0 \sin \beta = F_0 \cos \alpha'$$

(1)



где α и β углы, обозначенные на рисунке.

Рассматривая движение системы (две бусинки) в целом, заметим, что сумма сил притяжения бусинок равна нулю, поскольку эти силы являются внутренними. Следовательно, на движение центра масс влияют только силы реакции осей N_1 и N_2 , т.е. фактически их равнодействующая N .

Положение центра масс (точка C на рисунке) в начальный момент времени задается координатами

$$x_C = \frac{m_1}{m_1 + m_2} x_0 = \frac{x_0}{2}$$

$$y_C = \frac{m_2}{m_1 + m_2} y_0 = \frac{y_0}{2}$$

(2)

где x_0 и y_0 — начальные координаты бусинок.

Аналогично, проекции векторов скорости и ускорения центра масс на соответствующие оси координат в два раза меньше скоростей и ускорений самих бусинок.

Согласно основному закону динамики для ускорения центра масс системы в проекциях на соответствующие оси с учетом равенства (1) получим уравнения

$$\begin{cases} 2ma_{x_C} = -N_2 = -F_0 \cos \alpha \\ 2ma_{y_C} = -N_1 = -F_0 \sin \alpha \end{cases},$$

(3)

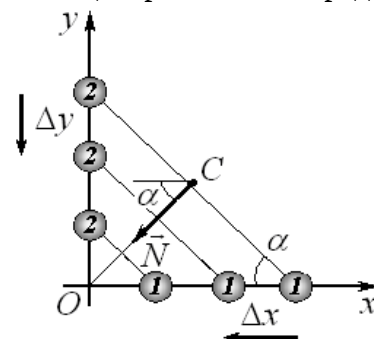
где a_x и a_y — проекции ускорения центра масс на координатные оси.

Как следует из (3), отношение проекций ускорений центра масс определяется отношением начальных смещений бусинок вдоль соответствующих осей

$$\frac{a_{x_C}}{a_{y_C}} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{x_0}{y_0}.$$

(4)

Кроме того, из (3) можно сделать вывод, что вектор равнодействующей N двух сил N_1 и N_2 всегда «смотрит»



В

начало координат (см. рис) и равен по модулю силе взаимодействия F_0 .

Следовательно, центр масс системы (точка C) будет двигаться по направлению к началу координат (вдоль отрезка CO) в течение всего времени движения. При этом отрезок 12 будет приближаться к началу координат, оставаясь параллельным самому себе, т.е. в процессе движения угол α будет оставаться постоянным.

Не смотря на очевидность сделанного утверждения докажем это.

Действительно, за малый промежуток времени Δt после начала движения бусинки сместятся на расстояния

$$\Delta x = \frac{a_x \Delta t^2}{2}; \Delta y = \frac{a_y \Delta t^2}{2}, \quad (5)$$

причем отношение этих расстояний определяется отношением ускорений бусинок в начальный момент времени

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{a_x}{a_y} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{x_0}{y_0} \quad (6)$$

Однако отношение

$$\frac{x_0}{y_0} = \frac{x_0 - \Delta x}{y_0 - \Delta y} = \text{ctg} \alpha = \text{const} \quad (7)$$

будет сохраняться при выполнении условия

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{x_0}{y_0}, \quad (8)$$

что совпадает с равенством (6). Таким образом, через малый промежуток времени Δt после начала движения отрезок 12 на рисунке сохранит свойство параллельности самому себе. Далее следует заметить, что и скорости бусинок по прошествии промежутка времени Δt будут находиться в том же отношении, поэтому и для последующих интервалов времени будет выполняться соотношение (8).

Таким образом, бусинки попадут в начало координат одновременно (и вместе с центром масс!), причем интересно, что данный вывод не зависит от вида зависимости силы $F(r)$ притяжения между бусинками.

Существенно в данном случае, чтобы сила притяжения была центральной, т.е. направленной вдоль отрезка, соединяющего бусинки в данный момент.

Альтернативные решения:

Для доказательства факта одновременного попадания бусинок в начало координат при произвольном взаимодействии $F(r)$ запишем уравнения движения вдоль каждой из осей

$$\begin{aligned} ma_1 &= -F \cos \alpha = -F(r) \frac{x}{r} \\ ma_2 &= -F \sin \alpha = -F(r) \frac{y}{r} \end{aligned} \quad (9)$$

где X и Y представляют собой текущие координаты бусинок. Переходя к безразмерным координатам

$$\xi = \frac{x}{x_0}, \quad \eta = \frac{y}{y_0},$$

видим, что получаются одинаковые уравнения движения при одинаковых начальных условиях

$$\xi''(t) = -\frac{F(r)}{m} \cdot \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}, \quad \xi_0 = 1.$$

$$\eta''(t) = -\frac{F(r)}{m} \cdot \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}, \quad \eta_0 = 1.$$

В таком случае решения также будут одинаковыми, что означает равенство времен движений бусинок.

2. Если сила притяжения бусинок постоянна по модулю, то движение центра масс (и бусинок) будет равноускоренным

$$2ma_c = N \Rightarrow a_c = \frac{N}{2m} = \frac{F}{2m}, \quad (10)$$

где a — модуль ускорения центра масс (направление – к началу координат).

Следовательно, искомое время находим по известным формулам

$$t = \sqrt{\frac{2S}{a_c}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{4}}}{F/(2m)}} = \sqrt{\frac{2m\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{F}} \quad (11)$$

Альтернативные решения:

Рассмотрим случай, когда сила притяжения между бусинками постоянна по модулю $F(r) = F_0$. Тогда можем записать второй закон Ньютона для каждой бусинки в виде

$$ma_1 = -F_0 \frac{x}{r} = -F_0 \frac{x_0}{r_0}$$

$$ma_2 = -F_0 \frac{y}{r} = -F_0 \frac{y_0}{r_0}$$

В таком случае движение бусинок будет равноускоренным, а уравнения движения будут иметь вид

$$x(t) = x_0 - \frac{F_0}{2m} \cdot \frac{x_0}{r_0} t^2; \quad y(t) = y_0 - \frac{F_0}{2m} \cdot \frac{y_0}{r_0} t^2.$$

Из последних уравнений следует, что время движения бусинок в этом случае

$$t = \sqrt{\frac{2mr_0}{F_0}} = \sqrt{\frac{2m\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{F_0}}.$$

3. В случае упругой связи, согласно условию, $F(r) = -k \cdot r$, поэтому сила будет меняться по модулю. В этом случае уравнение (3) примет вид

$$2ma_c = -F(r) \Rightarrow a_c = -\frac{kr}{2m}. \quad (12)$$

Учитывая, что в данном случае $a_c = \frac{r''(t)}{2}$, получим уравнение гармонических колебаний в виде

$$r''(t) + \frac{k}{m} r(t) = 0, \quad (13)$$

с периодом
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (14)$$

Следовательно, центр масс (вместе с бусинками) «доберется» до начала координат за четверть периода колебаний

$$t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (15)$$

Альтернативные решения:

В системе уравнений (9) запишем явное выражение для модуля силы $F = kr$

$$\begin{aligned} ma_1 &= -F(r) \frac{x}{r} = -kx \\ ma_2 &= -F(r) \frac{y}{r} = -ky \end{aligned}$$

Оба уравнения являются уравнениями гармонических колебаний с периодом, определяемым формулой (14).

4. При заряженных бусинках справедлив закон Кулона, согласно которому модуль силы притяжения разноименных зарядов в вакууме имеет вид

$$F(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2}. \quad (16)$$

В этом случае второй закон Ньютона для центра масс запишется следующим образом

$$2ma_c = -F(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{r^2} \Rightarrow a_c = -\frac{c}{r^2(t)}. \quad (17)$$

где $c = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m} = const$, причем в начальный момент времени $r(t=0) = r_0$.

Заметим, что уравнение (17) формально совпадает с уравнением движения под действием силы гравитации Ньютона, только значение размерной константы c будет определяться другими параметрами.

Используя подсказку условия (третий закон Кеплера), рассмотрим движение планеты (центра масс системы) по круговой траектории (частный случай эллипса, у которого оба фокуса совпадают) радиусом $\frac{r}{2}$.

В этом случае получаем

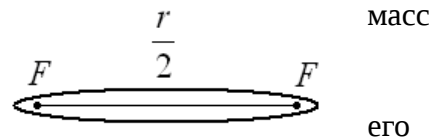
$$2m\omega^2 \frac{r}{2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2}, \quad (18)$$

$$\omega = \frac{q}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m r^3}}. \quad (19)$$

Как следует из (19) полный период обращения по окружности

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 m r^3}{q^2}} = \frac{4\pi}{q} \sqrt{\pi\epsilon_0 m \sqrt{(x_0^2 + y_0^2)^3}}. \quad (20)$$

Теперь рассмотрим гравитационное «падение» центра бусинок в начало координат по отрезку CO (см. рис. выше). Отрезок можно считать «стянутым» эллипсом, фокусы F которого находятся практически на его концах. Следовательно,



большая полуось будет равна $a = \frac{r}{4}$. Искомое время движения заряженных бусинок до начала

координат составит половину периода обращения T_2 по такому вытянутому эллипсу с большой полуосью $\frac{r}{4}$.

С учетом третьего закона Кеплера

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{(r/2)^3}{(r/4)^3} \Rightarrow T_2 = \frac{T_1}{\sqrt{8}} = \frac{T_1}{2\sqrt{2}} \quad (21)$$

$$t = \frac{T_2}{2} = \frac{T_1}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi}{q\sqrt{2}} \sqrt{\pi\epsilon_0 m \sqrt{(x_0^2 + y_0^2)^3}}. \quad (22)$$

В данной части задачи также можно воспользоваться **альтернативным вариантом** решения, так как уравнения (9) формально совпадают с уравнениями динамики движения в центральном поле в проекциях на декартовы оси координат.

Задача 11.2 Система автоматического наведения

1. Лучи света, параллельные оси системы (главной оптической оси линзы L_1), линза L_1 собирает в фокусе F_1 на расстоянии $d = F_2 + b$ от оптического центра линзы L_2 . Эта точка будет являться предметом для линзы L_2 . Записав формулу тонкой линзы

$$\frac{1}{F_2} = \frac{1}{f} + \frac{1}{d} \quad (1),$$

получим:

$$f = \frac{F_2(F_2 + b)}{b} \quad (2).$$

Поперечное увеличение линзы L_2 :

$$\frac{r_0 - a}{a} = \frac{f}{F_2 + b} \quad (3).$$

Таким образом, расстояние от изображения до оси системы:

$$r_0 = a \left(1 + \frac{F_2}{b} \right) \quad (4).$$

2. Лучи, идущие под углом α к оси системы, линза L_1 собирает в точке, лежащей на побочной оптической оси на том же расстоянии F_1 от плоскости линзы. Расстояние от оси системы до этой точки равно:

$$h = F_1 \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha F_1 \quad (5).$$

Расстояние от точки-предмета до оптической оси линзы L_2 (из-за ее вращения) изменяется в пределах от $a + h$ до $a - h$, при этом расстояние от изображения до этой оси изменяется от $r_{\max} - a$ до $r_{\min} - a$.

Выражение для поперечного увеличения линзы в первом случае будет иметь вид:

$$\frac{r_{\max} - a}{a + h} = \frac{f}{d} = \frac{F_2}{b} \quad (6).$$

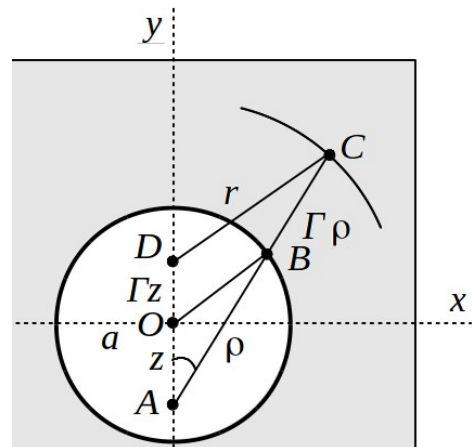
Тогда максимальное расстояние от оси системы до изображения точки:

$$r_{\max} = a \left(1 + \frac{F_2}{b} \left(1 + \frac{F_1 \alpha}{a} \right) \right) \quad (7).$$

Проведя аналогичные вычисления для минимального расстояния, получим:

$$r_{\min} = a \left(1 + \frac{F_2}{b} \left(1 - \frac{F_1 \alpha}{a} \right) \right) \quad (8).$$

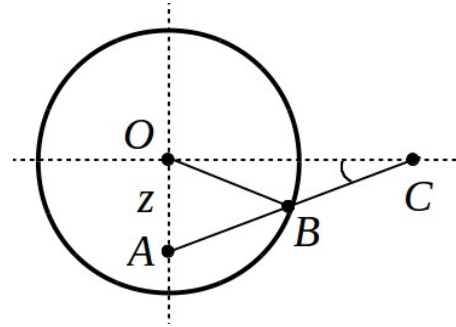
3. На рис.1 изображен вид системы спереди. Ось системы проходит через точку O . Точка-предмет находится на расстоянии $z = F_1 \alpha$ от оси в точке A . Ось линзы L_2 двигается по окружности радиуса a , центр линзы находится в точке B . На заднем плане изображена часть экрана S . В точке C находится изображение. При условии $b = F_2$ Поперечное увеличение равно $\Gamma = \frac{F_2}{b}$, поэтому: $BC = AB \cdot \Gamma = \Gamma \rho$.



Поставим на оси OY точку D так, что $OD = \Gamma \cdot OA$. Тогда треугольники ADC и AOB будут подобными. А это значит, что расстояние $r = \Gamma a$ и будет таким при любом положении зеркала.

Таким образом, изображение на экране описывает окружность с радиусом $r = \Gamma a$ и центр ее находится на расстоянии Γz от оси системы.

4. При пересечении второго детектора взаимное расположение линзы предмета и изображения будет таким, как на рис. 2.



При этом:

$$\rho = a$$

(9),

$$\sin \alpha = \frac{z}{2a} \quad (10).$$

Линза при этом поворачивается на угол:

$$\phi = \pi/2 + \alpha \quad (15)$$

Поэтому между срабатываниями 1-го и 2-го датчиков пройдет время:

$$\tau_1 = \frac{1}{\omega} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(\frac{F_1 \alpha}{2a} \right) \right) \quad (11).$$

Время между срабатываниями 2-го и 3-го равно:

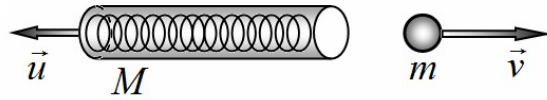
$$\tau_2 = \frac{1}{\omega} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \left(\frac{F_1 \alpha}{2a} \right) \right) \quad (12).$$

Время между срабатываниями 3-го и 4-го равно τ_2 , а между срабатываниями 4-го и 1-го — τ_1 .

5. Как следует из выражений (16) и (17), чем больше отклонение цели вдоль оси Oy , тем больше время между срабатываниями датчиков 1-2 и 4-1, соответственно, меньше — между датчиками 2-3 и 3-4. Простейший алгоритм работы системы управления — сравнить промежутки времени между срабатываниями датчиков, выбрать наименьший и поворачивать нос ракеты в направлении, задаваемом соответствующими датчиками.

Задача 11-3 Эффект Мёссбауэра и эффект Доплера

1.1 Запишем уравнения законов сохранения импульса и энергии для снаряда и пушки



$$\begin{cases} mv = Mu \\ \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $\frac{mv_0^2}{2}$ - энергия сжатой пружины, которая одинакова при выстреле из закрепленной и незакрепленной пушки.

Разделив оба уравнения на массу пушки получим

$$\begin{cases} \mu v = u \\ \frac{\mu v^2}{2} + \frac{u^2}{2} = \frac{\mu v_0^2}{2} \end{cases} \quad (2)$$

Подставляя выражения для скорости отдачи из первого уравнения во второе, найдем искомую скорость снаряда

$$\mu v^2 + \mu^2 v^2 = \mu v_0^2 \Rightarrow v = \frac{v_0}{\sqrt{1+\mu}}. \quad (3)$$

1.2 Если μ мало, то для скорости наряда можно записать

$$v = \frac{v_0}{\sqrt{1+\mu}} \approx v_0 \left(1 - \frac{1}{2}\mu\right). \quad (4)$$

Тогда относительное изменение скорости снаряда определяется выражением

$$\frac{\Delta v}{v_0} = \frac{v - v_0}{v_0} = -\frac{1}{2}\mu. \quad (5)$$

1.3 Потеря энергии снаряда равна кинетической энергии, приобретаемой стволом при отдаче

$$\Delta E = -\frac{Mu^2}{2}. \quad (6)$$

Следовательно, относительное изменение энергии фотона в следствие отдачи равно

$$\frac{\Delta E}{E_0} = -\frac{Mu^2}{mv_0^2} = -\frac{\mu v^2}{v_0^2} = -\frac{\mu}{1+\mu}. \quad (7)$$

При малых μ можно пренебречь этой малой величиной в знаменателе, тогда

$$\frac{\Delta E}{E_0} = -\frac{\mu}{1+\mu} \approx -\mu \quad (8)$$

1.4 Законы сохранения импульса и энергии в данном случае выражаются уравнениями

$$Mu = \frac{h\nu}{c}, \quad (9)$$

$$hv_0 = h\nu + \frac{Mu^2}{2}. \quad (10)$$

Выражая из уравнения (9) $u = \frac{h\nu}{Mc}$ и подставляя в уравнение (10), получим

$$h\nu_0 = h\nu + \frac{M}{2} \left(\frac{h\nu}{Mc} \right)^2. \quad (11)$$

Для упрощения алгебраических выкладок разделим на это уравнение на Mc^2 :

$$\frac{h\nu_0}{Mc^2} = \frac{h\nu}{Mc^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{h\nu}{Mc^2} \right)^2.$$

Используя предложенные параметры, получаем простое квадратное уравнение:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}. \quad (12)$$

положительное решение которого

$$\varepsilon = \sqrt{1+2\varepsilon_0} - 1. \quad (13)$$

.возвращаясь к обычным единицам, получим

$$h\nu = Mc^2 \left(\sqrt{1+2\frac{h\nu_0}{Mc^2}} - 1 \right). \quad (14)$$

В релятивистском подходе систему уравнений законов сохранения импульса и энергии имеет вид

$$\begin{aligned} p &= \frac{h\nu}{c} \\ h\nu_0 + Mc^2 &= h\nu + E_n \end{aligned} \quad (15)$$

где E_n . P - энергия и импульс, приобретенные ядром. Она связана с импульсом ядра соотношением

$$E_n^2 = M^2c^4 + p^2c^2. \quad (16)$$

Выражая из системы (15) импульс и энергию ядра и подставляя в уравнение (16), получим

$$(h\nu_0 - h\nu + Mc^2)^2 = (Mc^2)^2 + (h\nu)^2. \quad (17)$$

Как и ранее разделим это уравнение на $(Mc^2)^2$ и используем относительные единицы, в результате чего получим квадратное уравнение:

$$(\varepsilon_0 - \varepsilon + 1)^2 = 1 + \varepsilon^2 \quad (18)$$

Решение этого уравнение не сложно

$$\begin{aligned} (\varepsilon_0 + 1)^2 - 2\varepsilon(\varepsilon_0 + 1) + \varepsilon^2 &= 1 + \varepsilon^2 \Rightarrow \\ \varepsilon &= \frac{(\varepsilon_0 + 1)^2 - 1}{2(\varepsilon_0 + 1)}. \end{aligned} \quad (19)$$

1.5 При $\varepsilon_0 \ll 1$ относительное изменение энергии гамма-кванта также будет малым. Поэтому приближенные выражения можно получить непосредственно из уравнений для величины \mathcal{E} . Так из уравнения (12) следует:

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_0 = -\frac{\varepsilon^2}{2} \approx -\frac{\varepsilon_0^2}{2} \Rightarrow \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0} \approx -\frac{\varepsilon_0}{2}. \quad (20)$$

А из уравнения (18) получим

$$\begin{aligned}
 (1 - \Delta\varepsilon)^2 &= 1 + \varepsilon^2 \Rightarrow 1 - 2\varepsilon \cdot \Delta\varepsilon + (\Delta\varepsilon)^2 = 1 + \varepsilon^2 \Rightarrow \\
 -2\varepsilon \cdot \Delta\varepsilon &\approx \varepsilon^2 \Rightarrow \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0} \approx -\frac{1}{2}\varepsilon_0
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

Как следует из полученных формул, в первом приближении оба подхода дают одинаковые результаты.

1.6 Энергия покоя ядра Ir^{191} равна

$$E = \frac{Mc^2}{e} = \frac{191 \cdot 1,7 \cdot 10^{-27} \cdot (3,0 \cdot 10^8)^2}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 1,79 \cdot 10^{11} \text{ эВ}
 \tag{22}$$

Следовательно, введенный параметр равен

$$\varepsilon_0 = \frac{129 \cdot 10^3}{1,79 \cdot 10^{11}} \approx 7,2 \cdot 10^{-7}.
 \tag{23}$$

Что значительно меньше 1, поэтому классическое приближение вполне применимо.

Энергия отдачи в соответствии с формулой (19) равна

$$\Delta\varepsilon \approx -\frac{\varepsilon_0^2}{2} \Rightarrow \frac{Mv^2}{2} = Mc^2 \frac{\varepsilon_0^2}{2} \Rightarrow v = c\varepsilon_0 \approx 2,2 \cdot 10^2 \frac{m}{c}.
 \tag{24}$$

1.7 Относительный сдвиг энергии гамма кванта равен $\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0} \approx -\frac{1}{2}\varepsilon_0 \approx 3,6 \cdot 10^{-6}$.

1.8 Энергия гамма кванта должна быть больше, чем E_0 , так как часть энергии кванта перейдет в кинетическую энергию движения ядра. Запишем уравнения законов сохранения импульса и энергии, при условии, что гамма-квант поглотился

$$\begin{aligned}
 \frac{h\nu}{c} &= Mu \\
 h\nu &= h\nu_0 + \frac{Mu^2}{2}
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

Так как разность энергий является малой, то эти уравнения можно решать приближенно (и быстро):

$$\begin{cases} \frac{h\nu}{c} = Mu \\ h\nu = h\nu_0 + \frac{Mu^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \Delta(h\nu) = \frac{Mu^2}{2} = \frac{|Mu|^2}{2M} = \frac{|h\nu|^2}{2Mc^2} \approx \frac{|h\nu_0|^2}{2Mc^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta E}{E_0} \approx \frac{\varepsilon_0}{2}
 \tag{26}$$

Таким образом, относительный сдвиг, который приведет к поглощению гамма-кванта, равен сдвигу при отдаче, только направлен в другую сторону (в сторону увеличения частоты).

Часть 2. Эффект Доплера.

2.1 Если источник движется, то длина испущенной волны уменьшится на расстояние, которой проходит источник за один период волны. Следовательно, длина волны, испущенной движущимся источником, будет равна

$$\lambda = \lambda_0 - V_0 T_0. \quad (27)$$

Переходя к частотам волны, получим

$$\frac{c}{\nu} = \frac{c}{\nu_0} - \frac{V_0}{\nu_0}. \quad (28)$$

Откуда следует, что частота и ее относительный сдвиг (при скоростях источника, значительно меньше скорости волны) определяются по формулам

$$\nu = \nu_0 \frac{c}{c - V_0} \approx \nu_0 \left(1 + \frac{V_0}{c} \right) \Rightarrow \frac{\Delta \nu}{\nu_0} \approx \frac{V_0}{c}. \quad (29)$$

Часть 3. За что дают Нобелевские премии?

3.1 Для резонансного поглощения необходимо, чтобы сдвиг отдачи (как при испускании, так и при поглощении) был скомпенсирован доплеровским сдвигом, откуда следует, что должно выполняться условие

$$\frac{V_0}{c} \approx 2 \frac{\varepsilon_0}{2} \Rightarrow V_0 \approx \varepsilon_0 c \approx 2,2 \cdot 10^2 \frac{M}{c}. \quad (30)$$

Что равно скорости ядра при отдаче.

3.2 Повышение температуры должно приводить к усилению поглощения, так как в этом случае разброс скоростей теплового движения атомов становится больше. Следовательно, для больших пар атомов (один в источнике, другой в поглотителе) доплеровский сдвиг компенсирует сдвиг отдачи.

3.3 По графику можно найти, что поглощение практически прекращается, при изменении скорости на величину $\Delta V \approx \pm 2 \text{ см/с}$. Этому интервалу соответствует интервал частот

$\Delta \nu \approx \nu_0 \frac{\Delta V}{c} = \frac{E_0}{h} \frac{\Delta V}{c}$, или интервал энергий¹ $\Delta E \approx E_0 \frac{\Delta V}{c}$. Отсюда с помощью соотношения

неопределенности получаем оценку времени жизни ядра в возбужденном состоянии

$$\tau \approx \frac{hc}{E_0 \Delta V} \approx \frac{6,64 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{129 \cdot 10^3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 4 \cdot 10^{-2}} \approx 2 \cdot 10^{-10} \text{ с}$$

¹ Внимательные могут заметить на графике и шкалу изменения энергии ΔE !