

Решения задач.

9 класс.

Задание 1. «Разминка»

1.1 Лампочка.

Решение данной задачи фактически сводится к решению двух уравнений, одно из которых задано графически в виде зависимости сопротивления лампочки от силы протекающего тока. Второе уравнение следует из закона Ома

$$I(R_0 + R) = U_0, \quad (1)$$

где $U_0 = 20V$ - напряжение источника, $R_0 = 30\text{ Ом}$ - сопротивление, последовательно включенного резистора. Из уравнения (1) выразим

$$R = \frac{U_0}{I} - R_0 \quad (2)$$

и построим график этой функции (прямо на представленном графике). Точка пересечения двух графиков и будет решением. По графику находим, что значение силы тока в цепи приблизительно равно $I = 0,35A$.

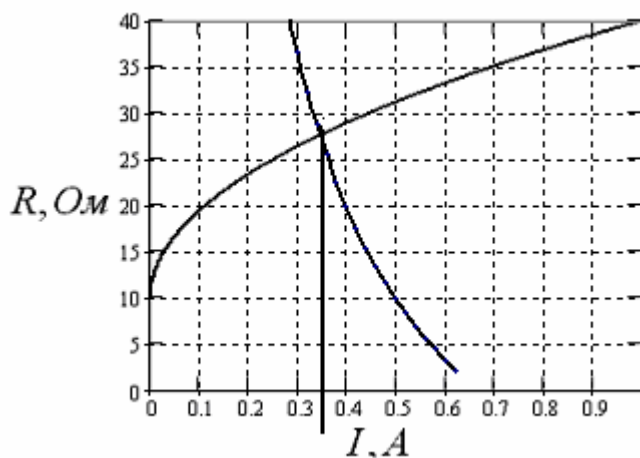
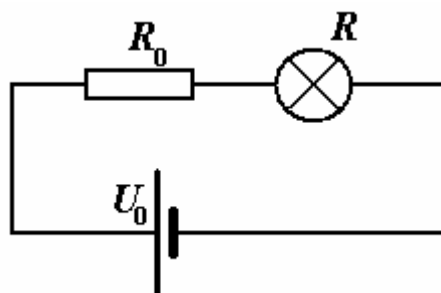
Решение также легко получить методом простой итерации. Берём на вскидку некоторое значение тока в цепи, из графика находим соответствующее значение R_L , подставляем его в формулу (3) и вычисляем новое значение тока.

$$I_{n+1} = \frac{U}{R + R_L(I_n)} \quad (3).$$

Результаты вычислений для $I_0 = 0,5A$ приведены в таблице

n	I, A	$R, \text{ Ом}$
0	0,5	32
1	0,32	26
2	0,36	27
3	0,35	27

Таким образом, ток в цепи равен: $I = 0,35A$



1.2 «Виброход»

При скольжении бруска по ленте транспортера его ускорение определяется из уравнения второго закона Ньютона

$$ma = \mu mg \Rightarrow a = \mu g. \quad (1)$$

Численные значения этих ускорений

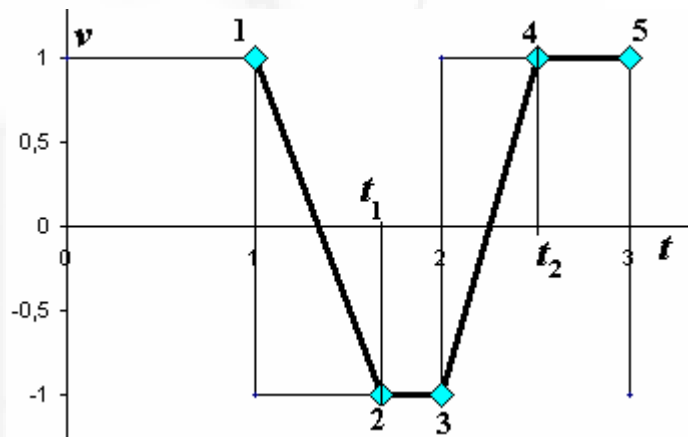
$$a_1 = \mu_1 g = 0,30 \cdot 9,81 \approx 2,94 \frac{M}{c^2} \quad (2)$$

$$a_2 = \mu_2 g = 0,40 \cdot 9,81 \approx 3,92 \frac{M}{c^2},$$

таковы, что за одну секунду брусок успевает изменить свою скорость и достичь «новой» скорости ленты.

Рассмотрим подробнее периодический процесс движения бруска.

Итак, пусть брусок движется вместе с лентой вправо (точка 1 на графике). В этом момент времени скорость ленты изменяется на противоположную, однако брусок некоторое время продолжает по инерции двигаться в прежнем направлении, затем направление его движения изменяется, наконец, его скорость сравнивается со скоростью ленты (т. 2), после чего он движется, оставаясь неподвижным относительно ленты, до тех пор, пока скорость ленты не изменится на противоположную (т.3).



Время изменения скорости бруска (время его ускоренного движения) легко найти

$$t_1 = \frac{2V}{\mu_1 g}. \quad (3)$$

Очевидно, что среднее смещение бруска за это время равно нулю. Смещение бруска за оставшейся промежуток времени (до изменения направления скорости ленты будет равно

$$\Delta x_1 = -V(\tau - t_1) = -V\left(\tau - \frac{2V}{\mu_1 g}\right). \quad (4)$$

Аналогичные рассуждения для движения ленты в противоположном направлении, приводят к аналогичной формуле, определяющей смещение бруска

$$\Delta x_2 = V(\tau - t_2) = V\left(\tau - \frac{2V}{\mu_2 g}\right). \quad (5)$$

Таким образом, суммарное смещение бруска за время 2τ будет равно

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = -V\left(\tau - \frac{2V}{\mu_1 g}\right) + V\left(\tau - \frac{2V}{\mu_2 g}\right) = \frac{2V^2}{g} \left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}\right), \quad (6)$$

следовательно, средняя скорость бруска равна

$$V_{cp.} = \frac{\Delta x}{2\tau} = \frac{V^2}{g\tau} \left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}\right) = \frac{1,0^2}{9,81 \cdot 1,0} \left(\frac{1}{0,30} - \frac{1}{0,40}\right) \approx 0,085 \frac{M}{c} \quad (7)$$

1.3 «Переменная теплоемкость»

Количество теплоты, которое требуется на нагревание тела до некоторой температуры t , численно равно площади под графиком зависимости теплоемкости от температуры. Выразим это количество теплоты

$$Q(t) = \frac{1}{2}(C_0 + C(t))(t - t_0). \quad (1)$$

Значения теплоемкости тела при температуре t можно выразить из графика линейной зависимости

$$C(t) = C_0 + \frac{C_1 - C_0}{t_1 - t_0}(t - t_0). \quad (2)$$

С другой стороны количество поступающей теплоты выражается через мощность нагревателя

$$Q = P\tau, \quad (3)$$

здесь τ - время нагревания.

Таким образом, для определения зависимости температуры бруска от времени имеем квадратное уравнение

$$\frac{1}{2} \left(C_0 + C_0 + \frac{C_1 - C_0}{t_1 - t_0}(t - t_0) \right) (t - t_0) = P\tau. \quad (4)$$

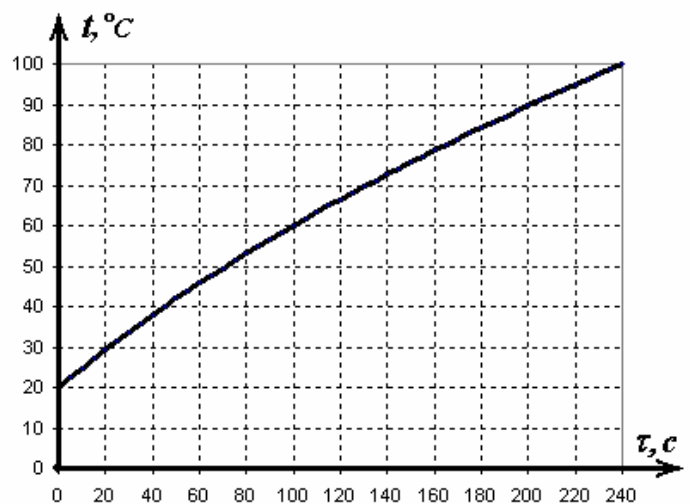
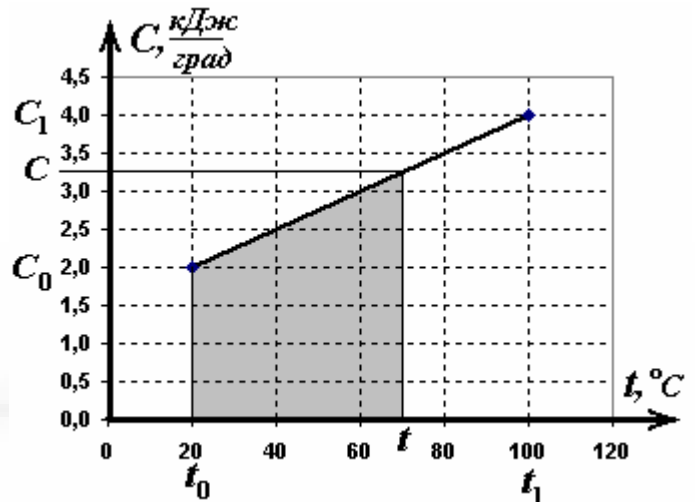
Решение которого не составляет труда (отрицательный корень отбрасываем)

$$(t - t_0) = \frac{\sqrt{4C_0^2 + 8P\tau \frac{C_1 - C_0}{t_1 - t_0}} - 2C_0}{2 \frac{C_1 - C_0}{t_1 - t_0}}$$

Подстановка численных значений приводит к функции, описывающей зависимость температуры от времени (время задается в секундах):

$$t(\tau) = 20\sqrt{16 + 0,20\tau} - 60. \quad (6)$$

График этой функции показан на рисунке.



Задание 2 «Вверх – вниз»

1) Рассмотрим струю жидкости радиусом r , движущуюся со скоростью v_0 по трубе. За промежуток времени Δt через произвольное поперечное сечение AB (рис. 3) струи площадью $S = \pi r^2$ пройдет жидкость объемом

$$V = S \cdot h = S v_0 \Delta t = \pi r^2 v_0 \Delta t.$$

Соответственно для массового расхода в этом случае получаем

$$q = \frac{m}{\Delta t} = \frac{\rho V}{\Delta t} = \frac{\rho \pi r^2 v_0 \Delta t}{\Delta t} = \rho \pi r^2 v_0. \quad (1)$$

Из (1) найдем скорость жидкости в вертикальном сечении струи

$$v_0 = \frac{q}{\rho \pi r^2} = 5,6 \frac{м}{с}. \quad (2)$$

2) Поскольку жидкость несжимаема, то объем жидкости, попавший на поверхность за некоторый промежуток времени t должен быть равен объему цилиндра, который образует жидкость при растекании по поверхности (см. рис. 01).

Пусть радиус пятна в рассматриваемый момент $R(t)$, тогда объем образовавшегося цилиндра найдем как $V = S \cdot h = \pi R^2(t) \cdot h$.

Из этого условия следует, что

$$m = qt = \rho V = \rho \pi R^2(t) h.$$

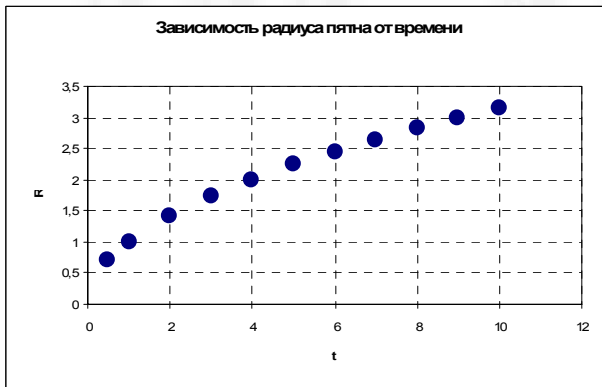
Из последнего равенства находим

$$R(t) = \sqrt{\frac{qt}{\rho \pi h}}. \quad (3)$$

Таким образом, радиус пятна растекания жидкости по поверхности увеличивается с течением времени прямо пропорционально квадратному корню из времени течения

$$R(t) \propto \sqrt{t}.$$

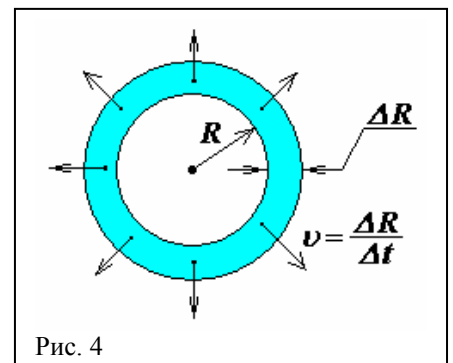
Примерный график полученной зависимости (3) приведен ниже.



3) Пусть за малый промежуток времени Δt радиус пятна увеличился на ΔR ($\Delta R \ll R$) (рис. 4). Жидкость, поступившая на поверхность за промежуток времени Δt , «заполнит» выделенное на рисунке кольцо (сильно увеличено).

Согласно полученному выражению (3) можем записать следующие равенства

$$R^2 = \frac{q}{\rho \pi h} \cdot t \quad (4)$$



$$(R + \Delta R)^2 = \frac{q}{\rho \pi h} \cdot (t + \Delta t). \quad (5)$$

Вычитая из (5) равенство (4), найдем связь между малыми величинами Δt и ΔR

$$2R\Delta R + \Delta R^2 = \frac{q}{\rho\pi h} \cdot \Delta t.$$

Поскольку $\Delta R \ll R$, то в последнем равенстве можно пренебречь ΔR^2 по сравнению со слагаемым $2R\Delta R$.

Соответственно, для скорости $v(t)$ движения границы пятна по поверхности получаем

$$v(t) = \frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{q}{\rho\pi h} \cdot \frac{1}{2R} = \left\{ R(t) = \sqrt{\frac{qt}{\rho\pi h}} \right\} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{q}{\rho\pi h} \cdot \frac{1}{t}}. \quad (6)$$

Таким образом, согласно (6) скорость $v(t)$ движения границы пятна убывает обратно пропорционально квадратному корню от времени

$$v(t) \propto \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Для определения функции $v(t)$ можно также найти производную от выражения (3) по времени, что несколько быстрее приводит к ответу

$$v(t) = \frac{\Delta R}{\Delta t} = \left(\sqrt{\frac{qt}{\rho\pi h}} \right)' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{q}{\rho\pi h t}}. \quad (7)$$

Для получения графика (таблицы) зависимости (6) можно также «вручную» обработать зависимость (3) скажем, для 10 точек и нанести точки на график (см. рис.). При этом получается монотонно убывающий график искомой зависимости $v(t)$.

4) Радиус водяного купола на земле определяется величиной r , а также начальной горизонтальной скоростью \vec{v}_0 струи на выходе из Г – образной конструкции (рис. 5) и временем $t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$ полета (падения) частиц воды с высоты H

$$R = r + v_0 t.$$

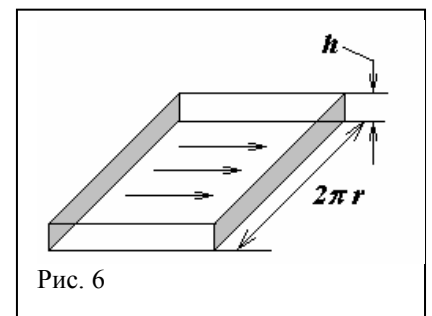
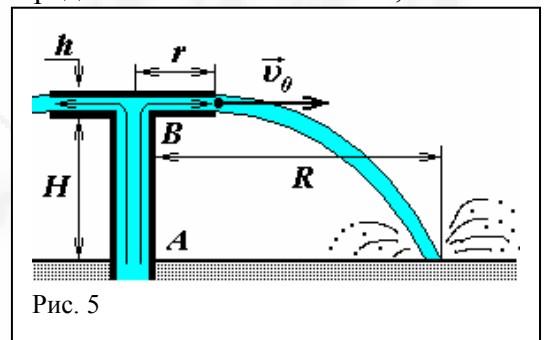
Масса воды, входящей в трубу AB , должна быть равна массе воды, выходящей через боковую поверхность конструкции (купола). В противном случае вода накапливалась бы в куполе, чего не происходит.

Это соображение позволит нам вычислить начальную горизонтальную скорость \vec{v}_0 воды на выходе из купола.

Если мысленно «развернуть» боковую поверхность Г – образной конструкции, через которую выходит вода, то получим прямоугольник (выделен на рис. 6) со сторонами h и $2\pi r$.

Следовательно, расход воды через боковую поверхность купола можем записать в виде

$$q\Delta t = \rho 2\pi r h v_0 \Delta t \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{q}{2\pi \rho r h}.$$



Соответственно, радиус водяного купола найдем, зная время падения воды и ее начальную скорость

$$R = r + v_0 t = r + \frac{q}{2\pi \rho r h} \sqrt{\frac{2H}{g}}. \quad (8)$$

Расчет по (8) дает

$$R = 1,2 \text{ м}.$$

Как следует из (8), при уменьшении h в $\eta = 2,0$ раза новый радиус купола на земле

$$R' = r + v_0 t = r + \frac{q}{\pi \rho r h} \sqrt{\frac{2H}{g}} = 2,3 \text{ м},$$

увеличится в $\eta = \frac{R'}{R} = 1,9$ раза.

Интересно, что в действующих установках «водяных куполов» при большом значении H поверхностное натяжение может даже «схлопнуть» купол так, что его радиус практически станет равным нулю. Однако при небольшой высоте купола влиянием поверхностного натяжения можно пренебречь.

Задание 3 «Кинематическая диаграмма»

1. Доказательство можно провести формально. Центр масс системы, состоящей из двух материальных точек, определяется радиус-вектором:

$$\vec{r}_{\text{ЦМ}} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}_2 \quad (1).$$

Аналогично определяется скорость центра масс:

$$\vec{v}_{\text{ЦМ}} = \frac{\Delta \vec{r}_{\text{ЦМ}}}{\Delta t} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{\Delta \vec{r}_1}{\Delta t} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{\Delta \vec{r}_2}{\Delta t} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_2 \quad (2).$$

Т.е. вектор скорости центра масс составляется так же как вектор центра масс. Поэтому его конец (а точки на диаграмме соответствуют концам векторов скоростей, начало которых – в начале координат) также лежит между точками, соответствующими скоростям движения отдельных частиц.

2. Как следует из предыдущего пункта, точка, соответствующая центру масс до соударения должна лежать на отрезке 12 , а после соударения на отрезке $1'2'$. Кроме того, в результате столкновения скорость центра масс не изменяется. Значит, центр масс находится на пересечении этих отрезков. Обозначим эту точку буквой O .

3. Чтобы доказать, что четырёхугольник $11'22'$ является равнобокой трапецией, достаточно доказать, что треугольники $1O1'$ и $2O2'$ являются равнобедренными. Действительно, в этом случае они окажутся подобными, а значит $\angle 1'1O = \angle 2'2O$, т.е. прямые $11'$ и $22'$ параллельны. Кроме того, из равнобедренности этих треугольников следует равенство треугольников $1O2'$ и $2O1'$, а значит и равенство «боков» трапеции.

С физической точки зрения равнобедренность упомянутых треугольников означает, что скорости движения частиц относительно их общего центра масс остаётся неизменной при соударении. Докажем это далеко не очевидный факт.

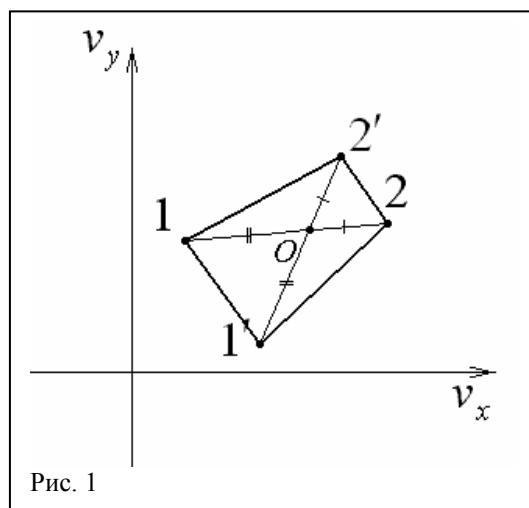


Рис. 1

Обозначим скорость движения первой частицы относительно центра масс до соударения \vec{u}_1 , а после столкновения – \vec{u}'_1 . Аналогично для второй частицы \vec{u}_2 и \vec{u}'_2 . Закон сохранения импульса, записанный в системе центра масс до соударения:

$$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = \vec{0} \quad (3)$$

Аналогично после соударения:

$$m_1\vec{u}'_1 + m_2\vec{u}'_2 = \vec{0} \quad (4)$$

Т.к. в этой системе отсчёта частицы движутся навстречу друг другу, то вектора \vec{u}_1 и \vec{u}_2 противоположно направлены. Т.е. законы сохранения импульса принимает вид:

$$m_1u_1 = m_2u_2 \quad (5)$$

$$m_1u'_1 = m_2u'_2 \quad (6)$$

Кроме того (удар абсолютно упругий) выполняется закон сохранения механической энергии:

$$\frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2} = \frac{m_1u_1'^2}{2} + \frac{m_2u_2'^2}{2} \quad (7)$$

Выражая u_1 из (5), а u'_1 из (6) и подставляя в (7), получим, что $u_1 = u'_1$. Аналогично и $u_2 = u'_2$. Что и требовалось доказать.

Это можно легко понять исходя из следующих рассуждений. В системе центра масс скорость второй (первой) частицы однозначно выражается через скорость первой (второй). Значит кинетическая энергия системы, также однозначно определяется скоростью первой (второй) частицы. А раз механическая энергия сохраняется, то неизменной остаётся и скорость первой (второй) частицы.

4. Из предыдущего доказательства следует, что при рассеянии возможны только ситуации, когда $u_1 = u'_1$ и $u_2 = u'_2$. Значит, геометрическое место точек всех возможных рассеяний представляет собой две окружности с общим центром масс и радиусами u_1 и u_2 (см. рис. 2).

5. Это столкновение изображено на рисунке 3. Точка 2', также как и точка 2, будет находиться на окружности большего радиуса. Вспомним ещё раз, что точки на диаграмме соответствуют концам векторов скоростей, начало которых находится в начале координат. Угол $\angle 212'$ и есть угол, на который поворачивается вектор скорости. Как видно, вектор скорости лёгкой частицы может повернуться на любой угол от нуля до 180 градусов в том или другом направлении.

6. В этом пункте ситуация иная. Теперь скорость рассеиваемой частицы принадлежит окружности меньшего радиуса (см. рис.4). Поэтому максимальное отклонение вектора скорости

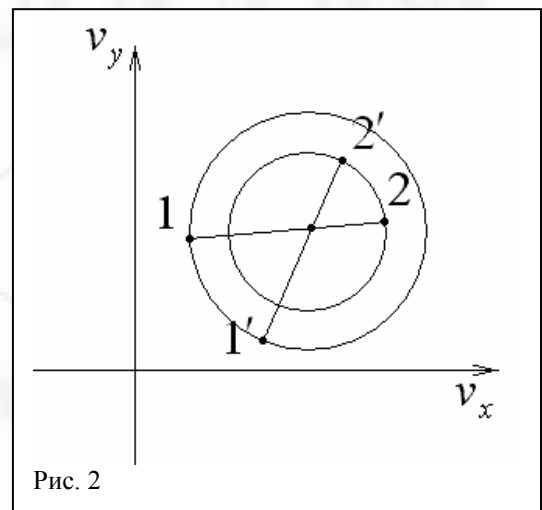


Рис. 2

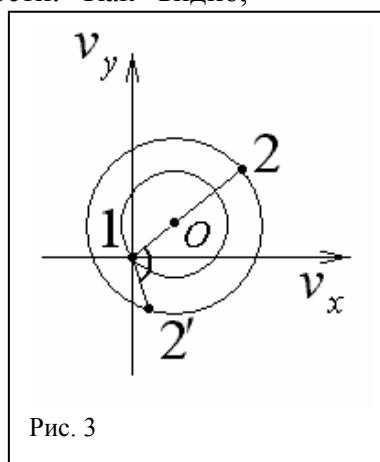


Рис. 3

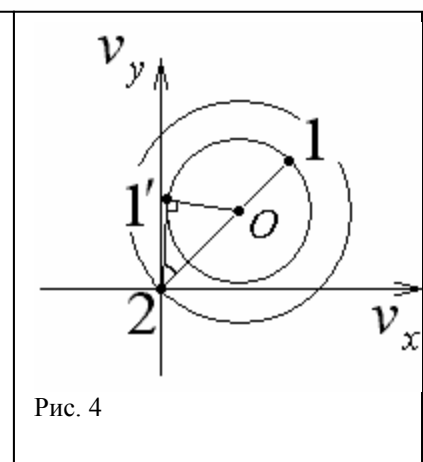


Рис. 4

реализуется только в том случае, когда $21' \perp O1'$. Максимальный угол легко находится из треугольника $21'O$:

$$\sin \alpha_{\max} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{m_2}{m_1} \quad (8),$$

т.к. $u_1 = \frac{m_2 v_1}{m_1 + m_2}$, а $u_2 = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$.

10 класс.

1.1 Варистор.

Для начала необходимо определить, какое напряжение было на нагрузке до скачка напряжения. Сопротивление параллельно соединённых резистора и варистора не может превышать 100M , поэтому и падение напряжения на этом участке будет на более 4В . Заметим, что при таком напряжении через варистор течёт очень маленький ток, т.е. его сопротивление очень большое и сопротивление этого участка в точности определяется сопротивлением нагрузки. Значит, до скачка на нагрузке было напряжение:

$$U_{H0} = \frac{U_0}{R + R_H} R_H = 4\text{В} \quad (1).$$

Обозначим ток в цепи после скачка $I_{\text{ц}}$. Общее напряжение есть сумма падений напряжения на резисторе R и напряжения на варисторе U :

$$RI_{\text{ц}} + U = U_1 \quad (2).$$

Ток в цепи есть сумма токов, текущих через нагрузку и варистор I :

$$I_{\text{ц}} = \frac{U}{R_H} + I \quad (3).$$

Поставляя это значение в (2) и используя численные значения U_1 , R и R_H , получим уравнение, связывающее ток и напряжение на варисторе.

$$I = 2,4 - \frac{3}{20}U \quad (4).$$

С другой стороны связь между током и напряжением приведена на графике. Чтобы определить U и I необходимо найти точку пересечения графика, приведённого в условии с графиком ВАХ.

Результат представлен на рис. 1.

Значения напряжения на варисторе, а значит и на нагрузке:

$$U = U_{H2} = 8,2\text{В} \quad (5).$$

Т.е. напряжение на нагрузке возрастёт чуть больше чем в два раза:

$$\frac{U_{H2}}{U_{H1}} \approx 2 \quad (6).$$

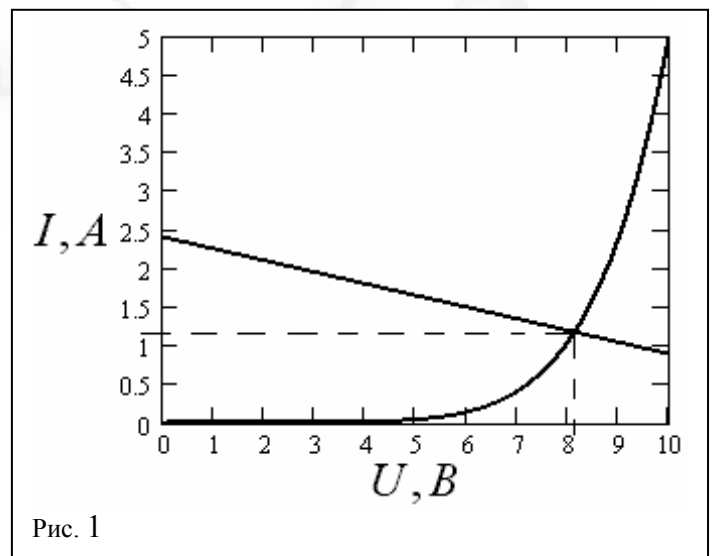


Рис. 1

1.2 «Гидроподушка».

Пусть струя воды площадью поперечного сечения S со скоростью v неупруго сталкивается со стенкой (рис. 3). За промежуток времени Δt стенки достигнут частицы воды в цилиндре высотой $h = v \Delta t$ и площадью поперечного сечения S .

Соответственно, масса воды $m = \rho V = \rho S h = \rho S v \Delta t$, содержащаяся в этом цилиндре, передаст стенке импульс $\Delta p = m v = \rho S v^2 \Delta t$, поскольку после столкновения ее импульс станет равным нулю.

Из второго (в импульсной форме) и третьего законов Ньютона для силы давления струи на стенку имеем

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \rho S v^2. \quad (6)$$

Однако в рассматриваемом случае струи воды бьют вверх, уменьшая свою скорость по мере подъема.

Согласно закону сохранения энергии, скорость v_1 струи на высоте h будет меньше начальной скорости v_0

$$v_1^2 = v_0^2 - 2gh \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gh}.$$

С учетом этого выражение (6) переписывается в виде

$$F = \rho S (v_0^2 - 2gh).$$

Расход воды в любом сечении вертикальной струи должен оставаться неизменным. С учетом выражения (1) для расхода воды можем записать

$$\rho S_0 v_0 = \rho S_1 v_1. \quad (7)$$

Сокращая в (7) на плотность жидкости, приходим к уравнению *неразрывности струи*, смысл которого понятен: скорость движения жидкости в струе больше там, где ее поперечное сечение меньше (в местах сужения)

$$v_0 S_0 = v_1 S_1.$$

Отсюда следует, что непосредственно перед столкновением с бруском площадь поперечного сечения струи увеличивается (см. рис. 3) до значения

$$S_1 = \frac{v_0 S_0}{v_1} = \frac{v_0 S_0}{\sqrt{v_0^2 - 2gh}}. \quad (7)$$

С учетом (6)-(7) находим, что сила давления одной вертикальной струи на брусок в рамках данной модели

$$F = \rho S_0 v_0 \sqrt{v_0^2 - 2gh}.$$

Соответственно, N струй удержат брусок на высоте h в том случае (рис. 4), если

$$NF = N \rho S_0 v_0 \sqrt{v_0^2 - 2gh} = mg. \quad (8)$$

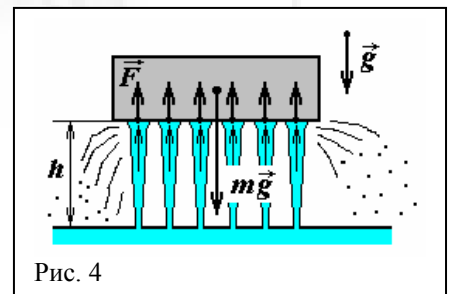
Из последнего равенства получим

$$h = \frac{1}{2g} \left(v_0^2 - \left(\frac{mg}{N \rho S_0 v_0} \right)^2 \right).$$

Поскольку площадь отверстия $S_0 = \pi r^2$, то окончательное выражение для h примет вид

$$h = \frac{1}{2g} \left(v_0^2 - \left(\frac{mg}{N \pi r^2 v_0} \right)^2 \right). \quad (9)$$

Расчет по формуле (9) дает



$$h = 56 \text{ см.}$$

Заметим, что рассмотренный принцип действия гидроподушки («воздушной» подушки) широко используется при создании современной техники, способной передвигаться как по суше, так и по воде.

Задание 2 «Торможение спутника»

1. При движении спутника, на него действует лишь сила притяжения со стороны Земли (сопротивление пока не учитываем). Она же является центростремительной силой.

$$G \frac{Mm}{R_0^2} = \frac{mv_0^2}{R_0} \quad (1).$$

Отсюда получаем:

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R_0}} \quad (2).$$

Период обращения:

$$T_0 = \frac{2\pi R_0}{v_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} R_0^{3/2} \quad (3).$$

2. Полная механическая энергия спутника есть сумма его потенциальной и кинетической энергий:

$$E_0 = -G \frac{Mm}{R_0} + \frac{mv_0^2}{2} = -G \frac{Mm}{2R_0} = -\frac{mv_0^2}{2} \quad (4).$$

Заметим, что полная энергия является отрицательной величиной и по модулю равна кинетической энергии.

3. Т.к. радиус орбиты изменяется несущественно, то можно считать, что на протяжении всего витка на него действует одна и та же постоянная по модулю сила сопротивления $F_c = C\rho_0 S v_0^2$, т.е. плотность воздуха и скорость в этом выражении считаем постоянными. Эта сила будет совершать отрицательную работу $A_c = -F_c \cdot 2\pi R_0$, что приведёт к уменьшению полной энергии спутника. Для вычисления относительного изменения скорости, воспользуемся выражением полной энергии спутника через его скорость. Тогда закон сохранения энергии примет вид:

$$-\frac{mv_0^2}{2} - C\rho_0 S v_0^2 \cdot 2\pi R_0 = -\frac{m(v_0 + \Delta v)^2}{2} \quad (5).$$

Сразу же отметим, что скорость должна увеличиваться. Преобразуем выражения, стоящие в правой части равенства.

$$(v_0 + \Delta v)^2 = v_0^2 \left(1 + \frac{\Delta v}{v_0}\right)^2 = v_0^2 \left(1 + 2\frac{\Delta v}{v_0} + \left(\frac{\Delta v}{v_0}\right)^2\right) \approx v_0^2 \left(1 + 2\frac{\Delta v}{v_0}\right) \quad (6).$$

В последнем преобразовании было учтено, что величина $\left(\frac{\Delta v}{v_0}\right)^2$ очень маленькая, поэтому её можно не учитывать.

Используя такое упрощение и преобразуя уравнение (5), получим:

$$\frac{\Delta v}{v_0} = 2\pi R_0 \frac{C\rho_0 S}{m} \quad (7).$$

Для определения относительного изменения радиуса орбиты, поступим следующим образом. Из (2) следует, что:

$$v_0^2 R_0 = GM = const \quad (8).$$

Другими словами, произведения квадрата скорости на радиус орбиты остаётся постоянной величиной. Значит:

$$(v_0 + \Delta v)^2 \cdot (R_0 - \Delta R) = v_0^2 R_0 \quad (9).$$

Совершив, преобразование (6), получим:

$$\frac{\Delta R}{R_0} = 2 \frac{\Delta v}{v_0} = 4\pi R_0 \frac{C\rho_0 S}{m} \quad (10).$$

Заметим, что в решении этого пункта присутствует существенное упрощение. С одной стороны мы считаем силу постоянной, а, т.к. в выражение для силы входит квадрат скорости, то его мы фактически тоже считаем постоянным. С другой стороны мы ищем изменение этой самой скорости. На самом деле, с изменением скорости изменяется и сила сопротивления, и точное решение будет несколько отличаться от полученного нами. Однако для малых относительных изменений скорости это различие будет несущественным и такой метод решения вполне применим.

4. Выражение для тангенциального ускорения легко получить, разделив изменение скорости спутника на величину промежутка времени, за который это изменение произошло, т.е. на продолжительность одного «витка».

$$a_T = \frac{\Delta v}{(2\pi R_0 / v_0)} = \frac{C\rho_0 S v_0^2}{m} = \frac{F_c}{m} \quad (11).$$

Такой вот получается парадокс. Вроде как сила сопротивления, а приводит к ускорению спутника.

5. Скорость снижения спутника находится аналогично:

$$v_{n0} = \frac{\Delta R}{(2\pi R_0 / v_0)} = \frac{2R_0 C\rho_0 S v_0}{m} \quad (12).$$

Используя выражение (2), получим:

$$v_{n0} = \frac{2C\rho_0 S \sqrt{GM}}{m} \sqrt{R_0} \quad (13).$$

Если плотность будет убывать обратно пропорционально корню квадратному от расстояния до центра Земли, то скорость v_{n0} не будет изменяться. Поэтому

$$\alpha = -\frac{1}{2} \quad (14).$$

6. Рассмотрим подробнее выражение (11). Выражая плотность, получим:

$$\rho = \frac{m}{CS} \frac{1}{v^2} a_T = \frac{m}{CS} \frac{1}{v^2} \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (15).$$

Таким образом, чтобы найти плотность, надо не знать скорость и ускорение спутника. Кроме того, понадобится также определять высоту, на которой находится спутник в данный момент времени:

$$h = R - R_0 = \frac{GM}{v^2} - R_0 \quad (16).$$

Подставим известные численные значения постоянных и получим:

$$\rho = 100 \frac{1}{v^2} \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (17)$$

$$h = \frac{4,00 \cdot 10^{14}}{v^2} - 6,4 \cdot 10^6 \quad (18).$$

Для вычисления $\rho(h)$ необходимо на приведённом графике взять несколько точек, по значению скорости вычислить высоту полёта спутника, а проведя касательные в этих точках, вычислить ускорения, что позволит определить плотность атмосферы. Результаты приведены в таблице 1.

Таблица 1.

$v, \text{м/с}$	$h, \text{км}$	$\Delta v / \Delta t, \text{м/с}^2$	$\rho, \text{кг/м}^3$	$\ln(\rho)$
7780	208	$6,6 \cdot 10^{-6}$	$1,1 \cdot 10^{-11}$	-25
7790	192	$5,6 \cdot 10^{-5}$	$9,5 \cdot 10^{-11}$	-23
7800	175	$4,3 \cdot 10^{-4}$	$7,0 \cdot 10^{-10}$	-21
7810	158	$4 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-9}$	-19

Точно провести касательную – сложная задача, поэтому ускорение приведено с двумя (а в последнем случае – с одной) значащими цифрами.

Видим, что в пятидесятикилометровом интервале высоты плотность изменяется почти на три порядка. В таблице также вычислен натуральный логарифм от плотности, что необходимо для определения β . На рисунке 1 приведён график $\ln(\rho) = f(h)$. Можно с достаточной долей уверенности сказать, что плотность действительно будет убывать по экспоненциальному закону.

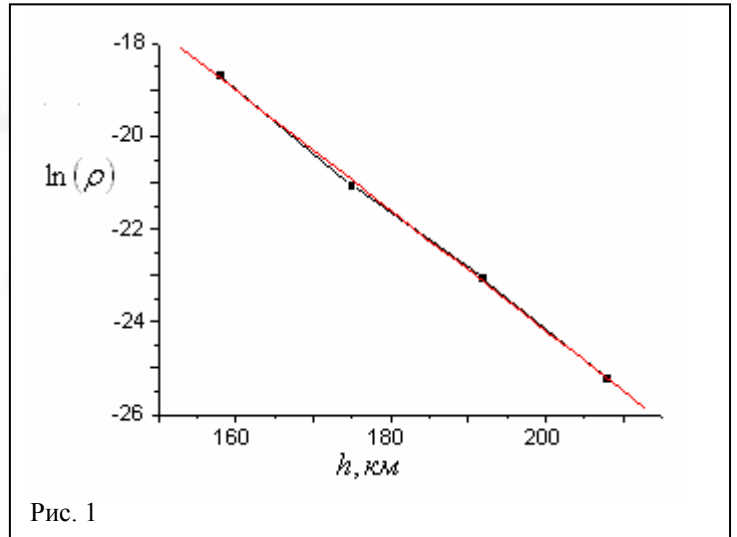


Рис. 1

Из этого графика можно получить величину постоянной β :

$$\beta = (1,3 \pm 0,2) \cdot 10^{-1} \text{ км}^{-1} = (1,3 \pm 0,2) \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1} \quad (19).$$

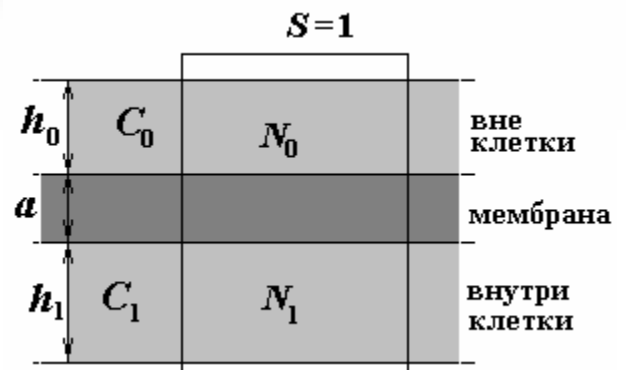
Задание 3. «Нервное возбуждение»

1. Диффузия.

Выделим параллелепипед с единичной площадью основания, боковые стороны которого перпендикулярны плоскости мембраны. Изменение чисел части в вне клетки и внутри нее (в пределах выделенного параллелепипеда) описывается уравнениями

(1)

$$\begin{aligned} \frac{\Delta N_0}{\Delta t} &= -g(C_0 - C_1) \\ \frac{\Delta N_1}{\Delta t} &= -g(C_1 - C_0) \end{aligned}$$



Учитывая связь между числом частиц и соответствующей концентрацией $N_{0,1} = C_{0,1} h_{0,1}$, перепишем уравнения (1) в виде

$$h_0 \frac{\Delta C_0}{\Delta t} = -g(C_0 - C_1)$$

$$h_1 \frac{\Delta C_1}{\Delta t} = -g(C_1 - C_0)$$

из которых следует уравнение, описывающее изменение разности концентраций

$$\frac{\Delta(C_0 - C_1)}{\Delta t} = -g \left(\frac{1}{h_0} + \frac{1}{h_1} \right) (C_0 - C_1). \quad (2)$$

Из этого уравнения следует, что характерное время установления равновесия определяется формулой

$$\tau = \frac{1}{g \left(\frac{1}{h_0} + \frac{1}{h_1} \right)} = \frac{h_0 h_1}{g(h_0 + h_1)}. \quad (3)$$

2. Вынужденный перенос и диффузия.

При наличии вынужденного переноса в уравнениях (1) появятся дополнительные слагаемые

$$\frac{\Delta N_0}{\Delta t} = -g(C_0 - C_1) - nm$$

$$\frac{\Delta N_1}{\Delta t} = -g(C_1 - C_0) + nm$$

Из этих уравнений следует, что в стационарном режиме (когда концентрации частиц не изменяются со временем) разность концентраций равна

$$\Delta \bar{C} = C_1 - C_0 = \frac{nm}{g}. \quad (5)$$

3. Электрическое поле.

Используя известные формулы для напряженностей полей, создаваемых плоским слоями, можно записать выражение для напряженности однородного поля внутри мембраны

$$E = \frac{e(C_1 h_1 - C_0 h_0)}{2\varepsilon_0}. \quad (6)$$

где e - заряд электрона, положительное направление поля - из клетки наружу.

Тогда разность потенциалов равна

$$\Delta \varphi = Ea = \frac{ea(C_1 h_1 - C_0 h_0)}{2\varepsilon_0}. \quad (7)$$

4. Перенос ионов.

Будем считать, что концентрация ионов внутри клетки превышает их концентрацию вне ее. В этом случае уравнения баланса числа частиц принимают вид

$$\frac{\Delta N_0}{\Delta t} = -g(C_0 - C_1) - nm + bC_1 \Delta \varphi$$

$$\frac{\Delta N_1}{\Delta t} = -g(C_1 - C_0) + nm - bC_1 \Delta \varphi$$

В стационарном режиме эти уравнения равносильны, поэтому для определения стационарных концентраций, к ним необходимо добавить условие постоянства числа частиц

$$C_0 h_0 + C_1 h_1 = C_e (h_0 + h_1). \quad (9)$$

Теперь из уравнений (7)-(9) нам необходимо найти выражение для разности потенциалов $\Delta\varphi$. Для упрощения расчетов все концентрации, фигурирующие в этих уравнениях, выразим через искомую разность потенциалов. Для чего запишем

$$C_0 h_0 + C_1 h_1 = C_e (h_0 + h_1)$$

$$C_1 h_1 - C_0 h_0 = \frac{2\varepsilon_0}{ea} \Delta\varphi$$

Теперь складывая и вычитая эти выражения, получим

$$C_1 = C_e \frac{(h_0 + h_1)}{2h_1} + \frac{2\varepsilon_0}{eah_1} \Delta\varphi$$

$$C_0 = C_e \frac{(h_0 + h_1)}{2h_0} - \frac{2\varepsilon_0}{eah_0} \Delta\varphi$$

Подставим эти выражения в уравнения (8) в стационарном режиме, в результате получим квадратное уравнение для определения стационарной разности потенциалов

$$-g \left(C_e \frac{(h_0 + h_1)}{2h_0} - \frac{2\varepsilon_0}{eah_0} \Delta\varphi - C_e \frac{(h_0 + h_1)}{2h_1} - \frac{2\varepsilon_0}{eah_1} \Delta\varphi \right) - nm + b \left(C_e \frac{(h_0 + h_1)}{2h_1} + \frac{2\varepsilon_0}{eah_1} \Delta\varphi \right) \Delta\varphi = 0$$

Путем алгебраических преобразований преобразуем его к стандартному виду

$$\frac{2\varepsilon_0 b}{eah_1} (\Delta\varphi)^2 + \left(\frac{2\varepsilon_0 g (h_0 + h_1)}{eah_0 h_1} + b C_e \frac{(h_0 + h_1)}{2h_1} \right) \Delta\varphi - \left(nm + C_e g \frac{h_1^2 - h_0^2}{2h_0 h_1} \right) = 0 \quad (10)$$

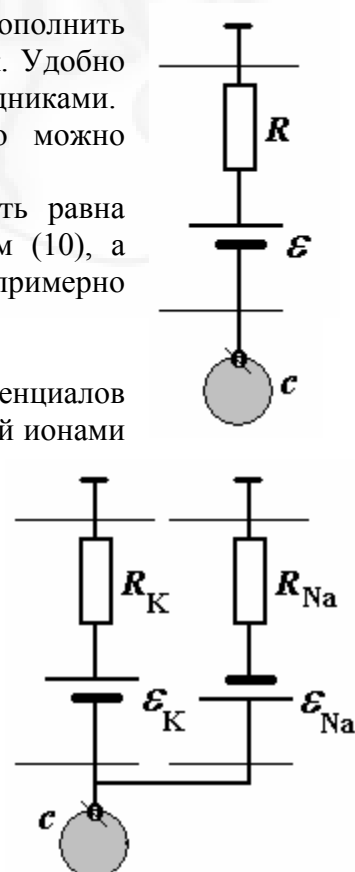
Положительный корень которого и даст искомую разность потенциалов.

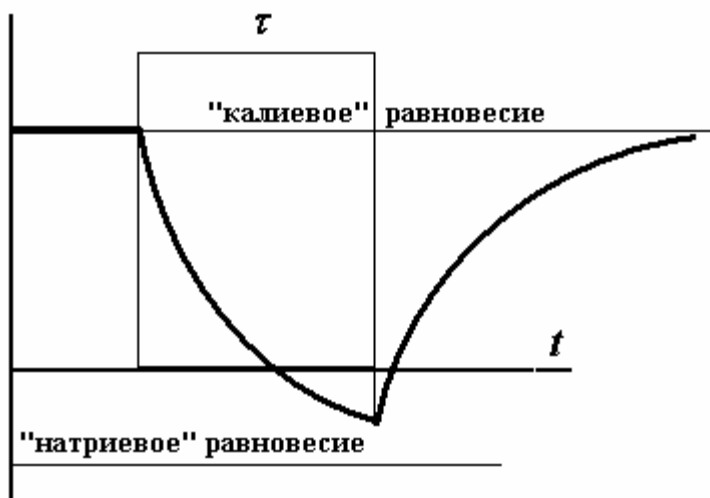
5. Эквивалентная схема.

Конечно, указанную эквивалентную схему следует дополнить электрическими емкостями слоев жидкости вне и внутри клеток. Удобно моделировать эти слои не конденсаторами, а уединенными проводниками. Если же принять потенциал вне клетки равным нулю, то можно «обойтись» и одним уединенным проводником.

В такой схеме очевидно, что эквивалентна ЭДС должна быть равна значению равновесного потенциала, определяемого уравнением (10), а величина RC соответствует времени установления равновесия, примерно определяемым формулой (3).

6. Когда натриевые каналы закрыты, то разность потенциалов определяется равновесной разностью потенциалов, обусловленной ионами калия (решением уравнения (10)). При открытии натриевых каналов в эквивалентную схему следует включить ЭДС, моделирующую натриевые насосы. В этом случае мембрана постепенно будет изменять свою поляризацию на противоположную, а разность потенциалов стремиться к равновесию, определяемому наличием двух ЭДС, то есть их разностью. Время перехода к этому равновесию будет меньше, так как сопротивление мембраны уменьшится. После закрывания натриевых каналов, мембрана система будет возвращаться к исходному состоянию с большим временем перехода. Схематически этот процесс показан на рисунке.





11 класс.

1.1 «Оптическая бистабильность»

В интерферометре Фабри-Перо коэффициент пропускания зависит от набега фазы

$$\psi = \frac{2\pi}{\lambda} nL \quad (1)$$

при однократном прохождении световой волной пространства между зеркалами. В сильных световых полях (на практике для этого годится излучение лазера) вещества начинают проявлять нелинейные свойства, например, показатель преломления начинает зависеть от интенсивности света. Поскольку величина показателя преломления определяет набег фазы ψ , это означает, что коэффициент пропускания интерферометра, заполненного нелинейным веществом, зависит от интенсивности падающего на него излучения. Ясно, что показатель преломления зависит от интенсивности (точнее, от квадрата модуля электрической напряженности) световой волны **внутри** интерферометра, но теоретический расчет показывает, что она пропорциональна интенсивности **выходящего** излучения, поэтому в условии сказано $n = n_0 + \gamma I_{\text{ВЫХ}}$.

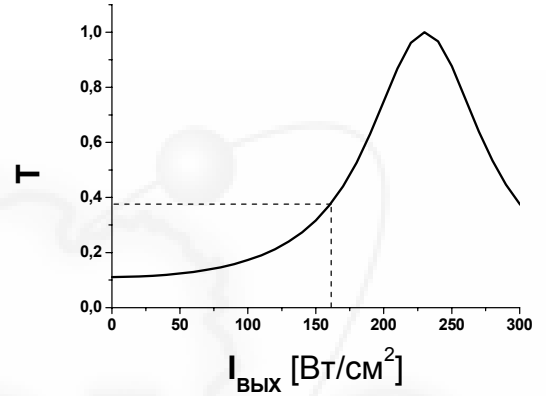
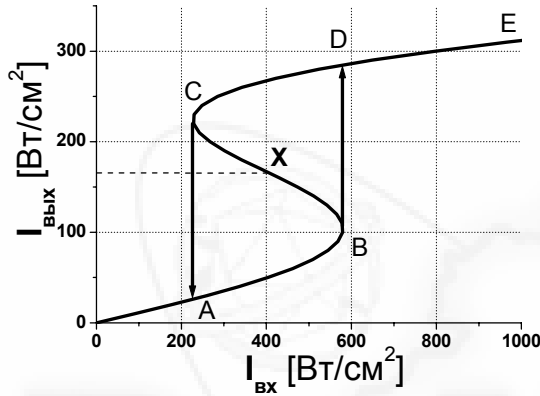
Итого, получается

$$I_{\text{ВЫХ}} = \frac{I_{\text{ВХ}}}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2\left(\frac{2\pi}{\lambda} L(n_0 + \gamma I_{\text{ВЫХ}})\right)}, \quad (2)$$

$$I_{\text{ВЫХ}} \left[1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2\left(\frac{2\pi}{\lambda} L(n_0 + \gamma I_{\text{ВЫХ}})\right) \right] = I_{\text{ВХ}}. \quad (3)$$

Решать уравнение (3) относительно $I_{\text{ВЫХ}}$ достаточно непросто, но этого и не требуется – необходимо построить график зависимости $I_{\text{ВЫХ}}$ от $I_{\text{ВХ}}$. Для этого можно просчитать обратную зависимость $I_{\text{ВХ}}$ от $I_{\text{ВЫХ}}$ (что гораздо проще), а потом построить необходимый график.

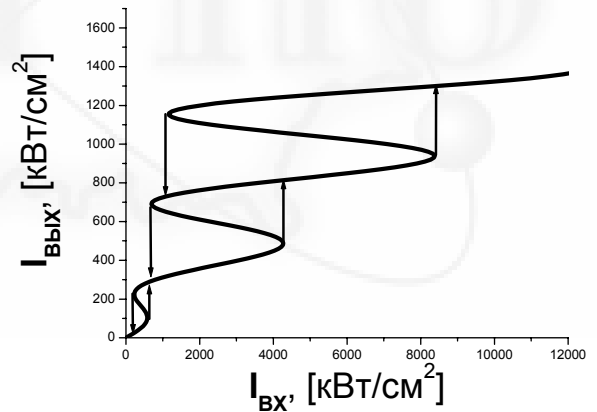
Как видно по графику, зависимость $I_{ВЫХ}$ от $I_{ВХ}$ не является функцией, поскольку на участке между $200\text{кВт}/\text{см}^2$ и $600\text{кВт}/\text{см}^2$ одному значению абсциссы соответствует несколько ординат точек графика. Какие же из них будут реализовываться на практике? Для ответа на этот вопрос построим зависимость коэффициента пропускания интерферометра от выходной интенсивности.



Рассмотрим точку X на участке BC, соответствующую $I_{ВХ} = 400\text{кВт}/\text{см}^2$. Предположим, что случайно $I_{ВХ}$ увеличилось. Это приведет к уменьшению $I_{ВЫХ}$ и, следовательно, к уменьшению коэффициента пропускания, а это приведет к дальнейшему уменьшению $I_{ВЫХ}$, что означает, что участок BC- неустойчивый и на практике он реализовываться не будет. Аналогично можно показать, что участки AB и CD – устойчивые. А это означает, что при увеличении $I_{ВХ}$ от нуля до $200\text{кВт}/\text{см}^2$ изменение $I_{ВЫХ}$ будет соответствовать графику OABDE, а при обратном уменьшении до нуля – EDCAO.

В данной системе возникает бистабильность – когда одной входной интенсивности соответствует два устойчивых значения выходной интенсивности, причем то, какое из них будет реализовано, зависит от направления изменения $I_{ВХ}$.

Если же далее увеличивать входную интенсивность, возникает ещё несколько устойчивых состояний интерферометра – это называется мультистабильностью.



1.2 «Грязный космос»

Пусть ракета прошла расстояние x внутри облака пыли (рис. 2). Тогда «заметенный» ракетой объем содержит массу пыли $\Delta m = \rho V = \rho Sx$.

Согласно условию, пыль массой Δm прилипла к ракете, следовательно ее масса

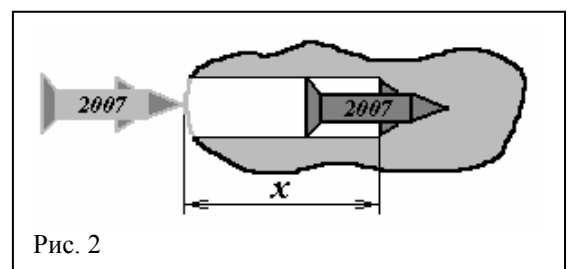


Рис. 2

возросла, а скорость, соответственно, уменьшилась.

Согласно закону сохранения импульса (система замкнута) найдем скорость ракеты в этот момент

$$m v_0 = (m + \Delta m) v \quad \Rightarrow \quad v(x) = \frac{m v_0}{m + \rho S x}. \quad (1)$$

Скорость ракеты при вылете из облака найдем, подставив в (1) значение $x = L$

$$v(x = L) = \frac{m v_0}{m + \rho S L}.$$

Для нахождения времени t движения ракеты в облаке перепишем (1) в виде

$$\frac{1}{v(x)} = \frac{1}{v_0} + \frac{\rho S}{m v_0} \cdot x \quad (2)$$

Тогда

$$t = \int dt = \int_0^L \frac{dx}{v(x)} = \int_0^L \left(\frac{1}{v_0} + \frac{\rho S}{m v_0} \cdot x \right) dx = \frac{1}{v_0} \cdot x \Big|_0^L + \frac{\rho S}{m v_0} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^L = \frac{L}{v_0} \left(1 + \frac{\rho S L}{2m} \right) \quad (3)$$

Заметим, что задачу вполне можно решить и без интегрирования. Для этого следует подобрать «удобные» координаты, в которых площадь под графиком имеет размерность времени.

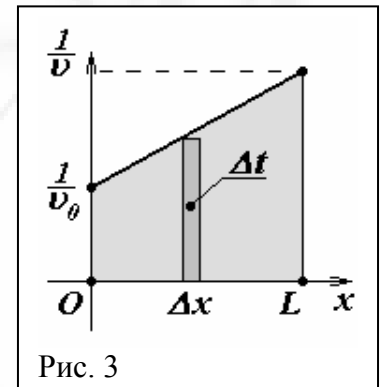
Рассмотрим зависимость «обратной скорости» $\frac{1}{v}$ от пройденного расстояния x . Малое расстояние Δx ракета пролетает за время $\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \left(\frac{1}{v} \right) \cdot \Delta x$, что соответствует площади выделенного элементарного столбика на рис. 3.

Таким образом, суммарная площадь под приведенным графиком на участке от нуля до $x = L$ равна времени t движения ракеты внутри облака.

В данном случае суммирование элементарных времен Δt сводится к нахождению площади трапеции

$$t = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{v_0} + \frac{1}{v} \right) \cdot L = \frac{L}{v_0} \left(1 + \frac{\rho S L}{2m} \right). \quad (4)$$

Заметим, что плотность межзвездного вещества (пыли, газа, плазмы) мала ($\rho \rightarrow 0$), но конечна. Как следует из (4), эффект торможения ракеты межзвездной пылью может оказаться существенным при протяженных ($L \rightarrow \infty$) космических путешествиях.



Задание 2. «У природы нет плохой погоды»

2.1. «Средняя температура»

Единица площади Солнца, как абсолютно черного тела, по закону Стефана-Больцмана излучает мощность σT_C^4 . Со всей поверхности Солнца излучается мощность

$$P_C = 4\pi R_C^2 \sigma T_C^4, \quad (1)$$

причем при распространении в пустом пространстве эта мощность остается постоянной

$$\Phi_0 4\pi L^2 = P_C = const. \quad (2)$$

Поток солнечного излучения на земной орбите (и вблизи поверхности Земли) равен

$$\Phi_0 = \sigma T_C^4 \left(\frac{R_C}{L} \right)^2, \quad (3)$$

$$\Phi_0 = 1380 \text{ Вт} / \text{м}^2. \quad (4)$$

Глядя из центра Солнца, земной шар виден, как круг радиусом R_3 . На Землю попадает излучение Солнца в пределах этого круга. Падающая на Землю мощность равна

$$P_{\text{пад}} = \pi R_3^2 \Phi_0. \quad (5)$$

Земля, как абсолютно черное тело (по условию) излучает в окружающее пространство мощность

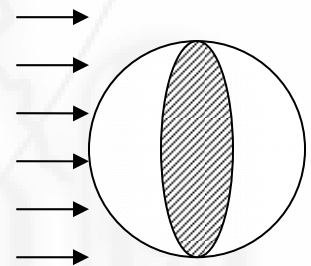
$$P_{\text{изл}} = 4\pi R_3^2 \sigma T_3^4. \quad (6)$$

Условие баланса энергии

$$P_{\text{пад}} = P_{\text{изл}}. \quad (7)$$

$$T_3 = T_C \sqrt{\frac{R_C}{2L}}, \quad (8)$$

$$T_3 = 279 \text{ К}. \quad (9)$$

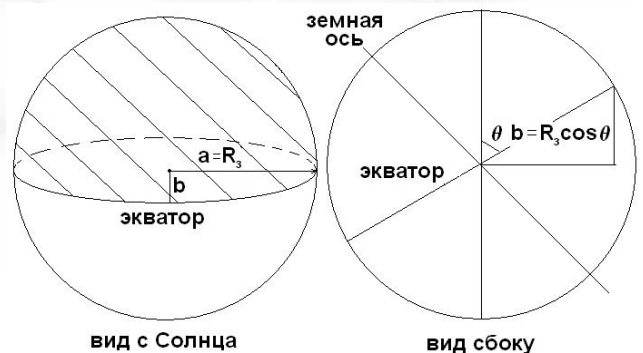


2. «Весна, лето, осень, зима и снова весна»

Мощность солнечного излучения, падающего на северное полушарие, равна произведению потока излучения Φ_0 на площадь проекции северного полушария (так, как оно видно с Солнца)

$$P = \Phi_0 S_{\text{пр}}. \quad (10)$$

Из-за того, что ось Земли наклонена к плоскости земной орбиты под углом $\theta = 66,5^\circ$, экватор в проекции виден как дуга эллипса. Только в дни осеннего и весеннего равноденствия экватор виден в проекции, как отрезок прямой. Площадь проекции северного полушария изменяется по достаточно сложному закону, но в данной задаче использовано приближение $S_{\text{пр}} = S_0 + S_1 \cos \Omega t$.



Очевидно, что угловая частота Ω совпадает с угловой скоростью движения Земли вокруг Солнца

$$\Omega = \frac{2\pi}{t_3} = 1,72 \cdot 10^{-2} \text{ суток}^{-1} = 1,99 \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-1}. \quad (11)$$

Для оценки постоянных A и B можно воспользоваться значением площади проекции северного полушария в самый длинный день

$$S_{\text{max}} = \frac{\pi R_3^2 + \pi R_3^2 \cos \theta}{2} = \frac{\pi R_3^2}{2} (1 + \cos \theta) \quad (12)$$

и площади проекции в самый короткий день

$$S_{\min} = \frac{\pi R_3^2 - \pi R_3^2 \cos \theta}{2} = \frac{\pi R_3^2}{2} (1 - \cos \theta). \quad (13)$$

Принцип отыскания площади проекции северного полушария понятен из рисунка и не требует специальных комментариев.

Максимальная мощность, падающая на северное полушарие, равна

$$P_{\max} = \Phi_0 \frac{\pi R_3^2}{2} (1 + \cos \theta) = 2\pi R_3^2 (A + B), \quad (14)$$

а минимальная

$$P_{\min} = \Phi_0 \frac{\pi R_3^2}{2} (1 - \cos \theta) = 2\pi R_3^2 (A - B). \quad (15)$$

Отсюда постоянные A и B равны

$$A = \Phi_0 / 4 = 345 \text{ Bm} / \text{m}^2, \quad (16)$$

$$B = (\Phi_0 \cos \theta) / 4 = 138 \text{ Bm} / \text{m}^2. \quad (17)$$

Солнечная энергия, падающая на северное полушарие от Солнца, идет на нагрев воды, покрывающей земной шар и на компенсацию потерь энергии, излучаемой Землей в космическое пространство. Энергетический баланс за время dt

$$2\pi R_3^2 h \rho c \cdot dT + 2\pi R_3^2 \sigma T^4 dt = 2\pi R_3^2 (A + B \cos \Omega t) dt, \quad (18)$$

$$h \rho c \frac{dT}{dt} + \sigma T^4 = (A + B \cos \Omega t). \quad (19)$$

Полученное уравнение – нелинейное неоднородное дифференциальное уравнение. В общем случае решать его достаточно сложно. Но в данной задаче логично предположить, что температура будет изменяться по закону

$$T(t) = T_0 + T_1 \cos(\Omega t - \varphi), \quad (20)$$

причем

$$T_1 < T_0. \quad (21)$$

Решение стоит искать в таком виде потому, что раз вынуждающая сила (правая часть уравнения (19)) гармонически изменяется во времени, то и решение будет изменяться гармонически. В данной задаче рассматривается модель климата Земли, поэтому амплитуда колебаний температуры T_1 намного меньше средней температуры T_0 . Отличная от нуля теплоемкость земной поверхности вызывает отставание колебаний температуры по фазе от колебаний падающего потока энергии, что и выражается слагаемым $-\varphi$ под косинусом.

Итак, необходимо найти постоянные T_0, T_1, φ . Для этого подставим предполагаемое решение (20) в уравнение (19):

$$-h \rho c \Omega T_1 \sin(\Omega t - \varphi) + \sigma (T_0 + T_1 \cos(\Omega t - \varphi))^4 = (A + B \cos \Omega t), \quad (22)$$

Поскольку $T_1 \ll T_0$ (правда, это надо проверить после того, как мы найдем T_0 и T_1) можно воспользоваться формулой приближенных вычислений $(1 + \xi)^n \approx 1 + n\xi$:

$$(T_0 + T_1 \cos(\Omega t - \varphi))^4 = T_0^4 (1 + \frac{T_1}{T_0} \cos(\Omega t - \varphi))^4 \approx T_0^4 (1 + 4 \frac{T_1}{T_0} \cos(\Omega t - \varphi)), \quad (23)$$

и ещё раскроем $\sin(\Omega t - \varphi)$ и $\cos(\Omega t - \varphi)$

$$\sin(\Omega t - \varphi) = \sin \Omega t \cos \varphi - \cos \Omega t \sin \varphi, \quad (24)$$

$$\cos(\Omega t - \varphi) = \cos \Omega t \cos \varphi + \sin \Omega t \sin \varphi. \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & -h \rho c \Omega T_1 \sin \Omega t \cos \varphi + h \rho c \Omega T_1 \cos \Omega t \sin \varphi + \sigma T_0^4 + \\ & + 4\sigma T_0^3 T_1 \cos \Omega t \cos \varphi + 4\sigma T_0^3 T_1 \sin \Omega t \sin \varphi = A + B \cos \Omega t. \end{aligned} \quad (26)$$

Синус и косинус изменяются независимо друг от друга во времени. Чтобы равенство (26) выполнялось в любой момент времени, необходимо, чтобы

$$\sigma T_0^4 - A = 0, \quad (27)$$

$$h\rho c\Omega T_1 \sin \varphi + 4\sigma T_0^3 T_1 \cos \varphi = B, \quad (28)$$

$$-h\rho c\Omega T_1 \cos \varphi + 4\sigma T_0^3 T_1 \sin \varphi = 0. \quad (29)$$

Итак, получилась система из трех уравнений с тремя неизвестными. Из (28) находим постоянную T_0

$$T_0 = \sqrt[4]{A/\sigma} = 279K. \quad (30)$$

Из (28) находим фазу φ

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{h\rho c\Omega}{4\sigma T_0^3}, \quad (31)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{h\rho c\Omega}{4\sigma T_0^3}\right) = 40,3^\circ, \quad (32)$$

что соответствует задержке по времени на

$$\tau = \frac{40,3^\circ}{360^\circ} 365,25 \text{ суток} \approx 41 \text{ сутки} \quad (33)$$

Это значит, что самый теплый день наступает на 41 день позже самого длинного. Именно поэтому июль теплее, чем июнь, несмотря на то, что больше всего солнечной энергии поступает на северное полушарие именно в июне.

Для определения постоянной T_1 можно подставить φ в уравнение (28), а можно возвести (28) и (29) в квадрат и сложить, тогда получим:

$$T_1 = \frac{B}{\sqrt{(h\rho c\Omega)^2 + (4\sigma T_0^3)^2}} = 21,4K. \quad (34)$$

Как видно, $T_1/T_0 \approx 0,077$, поэтому исходное предположение (21) верно и можно пользоваться формулой приближенных вычислений (23).

3. «Парниковый эффект»

Солнце и Земля излучают, как абсолютно черное тело. Но температура поверхности Солнца $T_C = 5800K$, а температура поверхности Земли (см. п. 1) $T_3 = 279K$, поэтому максимум спектра излучения Солнца и Земли приходится на разные длины волн: для Солнца - 500нм , а для Земли - $10,4\text{мкм}$.

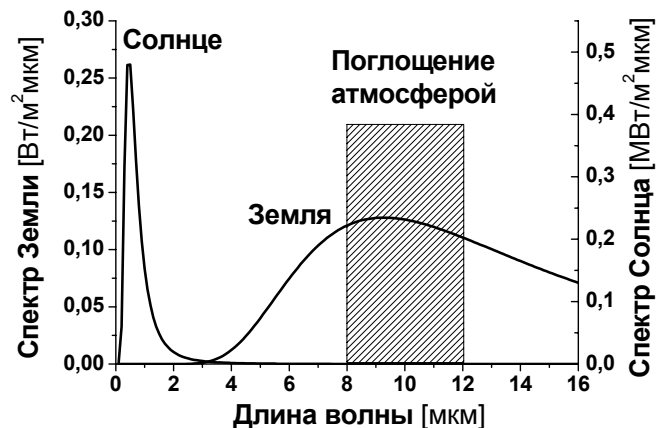
Поскольку атмосфера Земли поглощает излучение с длинами волн от $8,0\text{мкм}$ до $12,0\text{мкм}$, то излучение поверхности Земли будет поглощаться атмосферой гораздо сильнее, чем излучение Солнца. Это значит, что атмосфера будет служить для Земли «шубой», затрудняя отвод тепла во внешнее пространство, и температура поверхности Земли с атмосферой будет больше, чем в случае Земли без атмосферы.

На графике представлены спектры излучения Солнца и Земли, причем в разных масштабах, что понятно – ведь вся излучаемая интенсивность (а это площадь под графиком) по закону Стефана-Больцмана

$$I = \sigma T^4, \quad (35)$$

и у Солнца приблизительно в $2 \cdot 10^5$ раз больше, чем у Земли.

Интегральную интенсивность излучения Солнца и Земли находим



по формуле (35) (см. таблицу 1).

Интенсивность, приходящуюся на интервал длин волн, поглощаемых атмосферой, находим по приближенной формуле, приведенной в условии. Значение функции берем в середине интервала длин волн $\lambda_0 = 10,0 \text{ мкм}$.

$$I_{\text{пол}} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda_0^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda_0}} - 1} (\lambda_{\text{max}} - \lambda_{\text{min}}). \quad (36)$$

В таблице 1 представлены значения полной интенсивности, излучаемой Землей и Солнцем, значения поглощаемой интенсивности (по приближенной формуле и точно посчитанные при помощи ЭВМ) и коэффициент поглощения $A = I_{\text{пол}}/I$. Как видно, приближенные значения $I_{\text{пол}}$ незначительно отличаются от точных.

	Земля	Солнце
$I, \text{Вт/м}^2$	344	$1,01 \cdot 10^8$
$I_{\text{пол}} (\text{прибл.}), \text{Вт/м}^2$	86,1	$6,04 \cdot 10^4$
$I_{\text{пол}} (\text{точно}), \text{Вт/м}^2$	83,1	$6,87 \cdot 10^4$
A	0,250	$6,8 \cdot 10^{-4}$

Доля поглощаемого излучения Солнца A_0 мала, поэтому можно говорить, что атмосфера вовсе не поглощает солнечное излучение $A_0 \approx 0$ (37). Для Земли же поглощение составляет $A_1 = 0,250$ (38).

Для нахождения температуры земной поверхности необходимо рассмотреть баланс падающей и излучаемой энергии, схематически показанный на рисунке.

На земную поверхность падает солнечное излучение мощностью

$$P_0 = \sigma T_c^4 \left(\frac{R_c}{L} \right)^2 \pi R_3^2, \quad (39)$$

которое не поглощается в атмосфере.

Сама атмосфера излучает мощность P_2 в космос и такую же мощность на земную поверхность.

Земля излучает мощность

$$P_1 = \sigma T_3^4 4\pi R_3^2, \quad (40)$$

причем часть A_1 от этой мощности поглощается в атмосфере, а оставшаяся часть $(1 - A_1)$ уходит в космос.

Условие энергетического баланса (когда не происходит нагрева поверхности и атмосферы Земли):

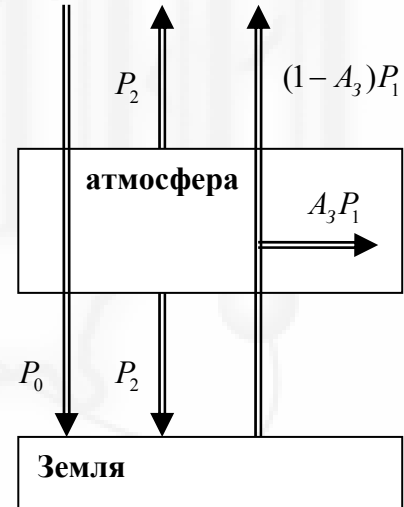
$$P_0 + P_2 = P_1 \quad (\text{для поверхности}), \quad (41)$$

$$2P_2 = A_1 P_1 \quad (\text{для атмосферы}). \quad (42)$$

Отсюда с учетом формул (40) и (42)

$$P_1 = \frac{P_0}{1 - \frac{A_1}{2}}, \quad (43)$$

$$\sigma T_3^4 4\pi R_3^2 = \frac{\sigma T_c^4 \left(\frac{R_c}{L} \right)^2 \pi R_3^2}{1 - \frac{A_1}{2}}, \quad (44)$$



$$T_3 = T_c \sqrt{\frac{R_c}{2L}} \sqrt[4]{\frac{1}{1 - A_1/2}} = 289K. \quad (45)$$

Это и есть так называемый «парниковый эффект» - земная атмосфера пропускает солнечные лучи, но задерживает излучение Земли, поэтому средняя температура планеты оказывается больше, чем температура планеты без атмосферы.

Замечание. Несомненно, для определения коэффициента поглощения надо находить излучаемую Землей интенсивность и поглощаемую атмосферой интенсивность, соответствующую истинной температуре Земли, т.е. не 279К, а 289К. Однако коэффициент поглощения в данном температурном интервале слабо зависит от температуры, поэтому для оценки можно пользоваться его значением для температуры поверхности Земли $T_3 = 279K$.

4. «Ядерная зима»

Опять рассмотрим баланс энергии. Если степень зачернённости атмосферы равна η , то в атмосфере поглотится солнечная мощность ηP_0 , а поверхности Земли достигнет только мощность $(1-\eta)P_0$. Излучение же Земли будет поглощаться полностью в интервале длин волн от 8,0мкм до 12,0мкм, а в других длинах волн интенсивность будет уменьшаться из-за зачернённости атмосферы. Это значит, что от излучаемой Землей мощности P_1 атмосфера будет поглощать мощность

$$P_1(A_1 + \eta(1 - A_1)). \quad (48)$$

Условие энергетического баланса:

$$(1 - \eta)P_0 + P_2 = P_1 \quad (\text{для поверхности}), \quad (46)$$

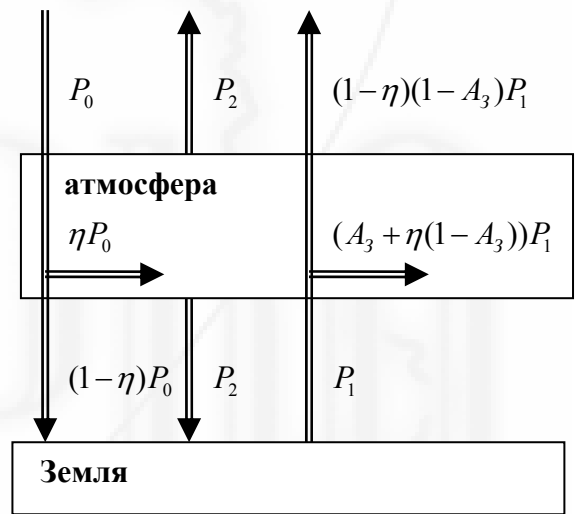
$$2P_2 = \eta P_0 + (A_1 + \eta(1 - A_1))P_1 \quad (\text{для атмосферы}). \quad (47)$$

Решение системы(48), (49) приводит к результату

$$P_1 = P_0 \frac{1 - \eta/2}{1 - (A_1 + \eta(1 - A_1))/2}, \quad (48)$$

$$T_3 = T_c \sqrt{\frac{R_c}{2L}} \sqrt[4]{\frac{1 - \eta/2}{1 - (A_1 + \eta(1 - A_1))/2}} \approx 285K. \quad (49)$$

Для Земли парниковый эффект играет очень большую роль – не будь в атмосфере парниковых газов, средняя температура на планете была бы гораздо ниже. При совершенно задымленной атмосфере температура поверхности планеты опустится до 279К. Как видно, в случае задымленной атмосферы температура поверхности оказывается меньше. В связи с этим данный эффект получил название «ядерная зима», хотя, причиной его не обязательно может стать взрыв ядерного оружия. Годится извержение вулкана или падение крупного метеорита – лишь бы атмосфера стала пропускать меньше солнечного излучения.



Задание 3. «Охлаждение светом»

1. Пусть скорость атома после поглощения равна v_1 . Запишем законы сохранения энергии и импульса в неподвижной системе координат:

$$\frac{mv_0^2}{2} + E_\phi = \frac{mv_1^2}{2} + E_1 \quad (1),$$

$$mv_0 - \frac{E_\phi}{c} = mv_1 \quad (2).$$

Очевидно, что скорость изменится незначительно, поэтому справедливо следующее преобразование:

$$v_0^2 - v_1^2 = (v_0 + v_1) \cdot (v_0 - v_1) = 2v_0(v_0 - v_1) \quad (3).$$

Приведём уравнения (1) и (2) к следующему виду:

$$mv_0(v_0 - v_1) = E_1 - E_\phi \quad (4),$$

$$mc(v_0 - v_1) = E_\phi \quad (5).$$

Разделив (4) на (5), получим:

$$\frac{v_0}{c} = \frac{E_1}{E_\phi} - 1 \quad (6).$$

Тогда:

$$E_\phi = \frac{E_1}{1 + \frac{v_0}{c}} = E_1 \left(1 - \frac{v_0}{c} \right) \quad (7),$$

$$\text{т.к. } \frac{v_0}{c} \ll 1 \quad (8).$$

Результат (7) можно было получить сразу, если помнить про эффект Доплера. Т.е. при движении фотонов навстречу атомов, их энергия может быть несколько меньше, энергии резонансного поглощения атомов.

2. Т.к. энергия фотона отличается от E_1 на малую величину, то в закон сохранения импульса можно вместо E_ϕ подставить E_1 и получить значение Δv :

$$\Delta v = \frac{E_1}{mc} \quad (9),$$

где

$$m = \frac{m_{Na}}{N_A} = 3,8 \cdot 10^{-26} \text{ кг} \quad (10).$$

Численное значение Δv :

$$\Delta v = 0,029 \frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 3 \frac{\text{см}}{\text{с}} \quad (11).$$

Полученное значение Δv соответствует потери скорости в процессе поглощения. За поглощением последует излучение. Изменение скорости при излучении будет таким же. Однако при излучении фотон может вылететь в любом направлении и в среднем скорость вдоль Ox не изменится.

В этом, собственно, и заключается принцип охлаждения.

3. Максимальное отклонение от направления движения, будет наблюдаться при излучении фотона в перпендикулярном направлении. Тогда отклонение от первоначального направления:

$$\alpha = \frac{\Delta v}{v_0} \approx 6 \cdot 10^{-5} \text{ рад} \quad (12).$$

Видим, что отклонение незначительно, поэтому может произойти много тысяч актов поглощения и испускания, прежде чем атом покинет пучок.

4. Для определения промежутка скоростей, в котором атомы могут поглощать фотоны с энергией $E_\phi = E_1 \left(1 - \frac{v_0}{c}\right)$, запишем следующее выражение:

$$\left(E_1 + \frac{\Delta E}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{(v_0 + \Delta v_0)}{c}\right) = E_1 \left(1 - \frac{v_0}{c}\right) \quad (13).$$

Преобразуя (13), при этом, отбрасывая очень маленькие величины (такие, как $\frac{\Delta E}{2} \frac{v_0}{c}$ и, тем более, $\frac{\Delta E}{2} \frac{\Delta v_0}{c}$), получим:

$$\Delta v_0 = c \frac{\Delta E}{2E_1} \approx 3 \text{ м/с} \quad (14).$$

Таким образом, в процессе охлаждения задействованы атомы, скорости которых лежат в довольно узком интервале. Приблизительно после 200 актов охлаждения, этот диапазон полностью опустеет. Необходимо слегка увеличивать частоту лазера, чтобы захватить также атомы с более низкими скоростями.

5. Интенсивность пучка достаточно высокая. Поэтому можно считать, что как только атом излучил фотон, он тут же поглотит следующий. Время жизни в возбуждённом состоянии находим и соотношения неопределённости:

$$\tau \approx \frac{h}{\Delta E} \approx 10^{-7} \text{ с} \quad (15).$$

Для охлаждения самых «горячих» атомов ($v_{\max} = 1000 \text{ м/с}$) потребуется

$$N = \frac{1000 \text{ м/с}}{0.03 \text{ м/с}} \approx 3000 \quad (16)$$

циклов поглощение-излучение. Т.е. для полного охлаждения понадобится время

$$T = N\tau \approx 3 \cdot 10^{-4} \text{ с} \quad (17).$$

Таким образом, охлаждение светом – довольно быстрый процесс, длительность которого не более одной миллисекунды.

После каждого акта торможения, скорость в направлении Ox уменьшается на 3 м/с за время 10^{-7} с , т.е. можно сказать, что атомы двигаются с ускорением

$$a = \frac{\Delta v}{\tau} \approx 3 \cdot 10^5 \text{ м/с}^2 \quad (18).$$

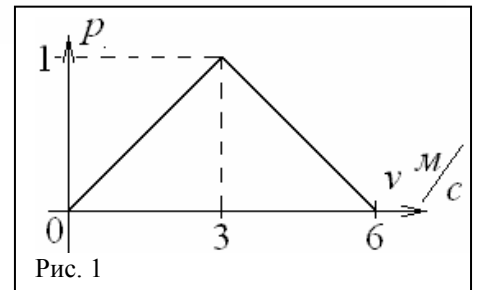
Тогда путь, который пройдут «горячие» будет равен

$$S = \frac{v_0^2}{2a} \approx 2 \text{ м} \quad (19).$$

6. При такой энергии фотонов, в процессе поглощения могут участвовать только атомы, скорости которых лежат в интервале $(0; 2\Delta v_0)$ или

$(0 \text{ м/с}; 6 \text{ м/с})$. Причём при скорости $v = \Delta v_0 = c \frac{\Delta E}{2E_1} \approx 3 \text{ м/с}$ атомы поглощают

фотоны, с энергией, соответствующей переходу в центр возбуждённого состояния. В условии сказано, что в этом случае поглощение происходит практически со стопроцентной вероятностью. Для оценки, будем считать, что эта вероятность линейно уменьшается до нуля, для скорости 0 и 6 м/с (см. рис.1). Для нас больший



интерес представляет интервал до $3M/c$, на котором зависимость вероятности поглощения от скорости атома задаётся выражением:

$$p(v) = \xi \cdot v \quad (20).$$

Необходимо уяснить, в чём принципиальная разница между процессами упругого и неупругого (поглощение) рассеяния. При поглощении, атом в среднем уменьшает свою скорость на величину $\Delta v = \frac{E_1}{mc}$, т.е. кинетическая энергия изменяется на величину

$$\Delta E_- = mv\Delta v = E_1 \frac{v}{c} \quad (21).$$

Разберёмся, что происходит при упругом столкновении атома и фотона. При этом фотон произвольно изменяет направление своего движения и сообщает атому определённый импульс в произвольном направлении. Упруго рассеянный фотон разогревает атом. Максимальное изменение импульса атома происходит при лобовом соударении ($2\frac{E_\phi}{c}$). Можно считать, что в среднем атом получает импульс равный $\frac{E_\phi}{c}$. Причём направление этого импульса случайно, т.к. фотоны летят со всех сторон, поэтому среднее изменение импульса равно нулю. Однако увеличение кинетической энергии пропорционально среднему изменению квадрата импульса:

$$\Delta E_+ = \frac{(\Delta p)^2}{2m} \quad (22).$$

Среднее значение $(\Delta p)^2$ не равно нулю. Для нашей оценки можно считать, что:

$$\langle \Delta p \rangle^2 = N \frac{E_\phi^2}{c^2} \quad (23).$$

Теперь надо определиться, что понимать под N . На самом деле, это не только количество фотонов упруго рассеянных на атоме. Вспомним, что после поглощения, атом должен испустить фотон, а излучение также происходит в произвольном направлении. Т.е. N – это суммарное количество фотонов, попавших на атом за некоторый промежуток времени.

Итак, пусть за некоторый промежуток времени с атомом взаимодействует N фотонов. Все они приводят к среднему увеличению кинетической энергии на величину (23). Однако некоторая их часть приводит также и к охлаждению на величину (21). Число таких «охладителей» пропорционально вероятности процесса поглощения, т.е. пропорционально скорости атома:

$$N_- = N \cdot p(v) = N\xi v \quad (24).$$

Через некоторый промежуток времени в ловушке установится равновесие, т.е. атомы будут двигаться с такой скоростью, что будут поглощать фотонов ровно столько, чтобы скомпенсировать разогрев, вызванный случайными процессами рассеяния ($\Delta E_- = \Delta E_+$). Т.е.

$$N\xi v \cdot E_1 \frac{v}{c} = N \frac{E_\phi^2}{2mc^2} \quad (25).$$

Из (25), считая, что $E_1 \approx E_\phi$ получим:

$$mv^2 = \frac{1}{\xi} \frac{E_1}{2c} \quad (26).$$

Величину ξ мы вводили, как коэффициент пропорциональности между p и v .

$$\xi = \frac{1}{\Delta v_0} = \frac{2E_1}{c\Delta E} \quad (27).$$

Подставляя это значение в (26), получим:

$$mv^2 = \frac{\Delta E}{4} \quad (28).$$

Известна связь между кинетической энергией атомов и их температурой:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}kT \quad (29).$$

В итоге:

$$T = \frac{1}{k} \frac{\Delta E}{12} \approx 0,1 \frac{\Delta E}{k} \approx 5 \cdot 10^{-5} K \quad (30).$$

