

Гомель 1992 г. (Решения)

9-1. Выберем систему отсчета с центром у основания фонаря. Пусть в некоторый момент проекция луча на землю образует угол α с линией тротуара (вид сверху). Учитывая прямолинейность распространения света, можем записать

$$\frac{H}{l_0 + \frac{l}{\sin \alpha}} = \frac{h}{l_0} \Rightarrow l_0 = \frac{l}{\sin \alpha} \frac{h}{H-h}.$$

Тогда

$$y_T = l + l_0 \sin \alpha = l \frac{H}{H-h},$$

(y_T - координата конца тени) есть величина постоянная! Следовательно, тень от головы движется по прямой параллельной оси X со скоростью

$$v_T = v \frac{H}{H-h},$$

что легко получить, составив пропорцию

$$\frac{vt}{l} = \frac{v_T t}{l \frac{H}{H-h}}.$$

График зависимости скорости тени от x есть прямая линия, параллельная оси абсцисс.

9-2. Из условия равновесия «висящей» части веревки имеем

$$T_1 \cos \alpha = T_2, \quad (1)$$

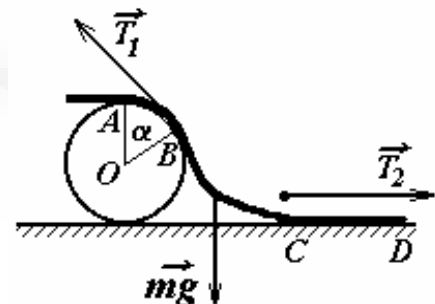
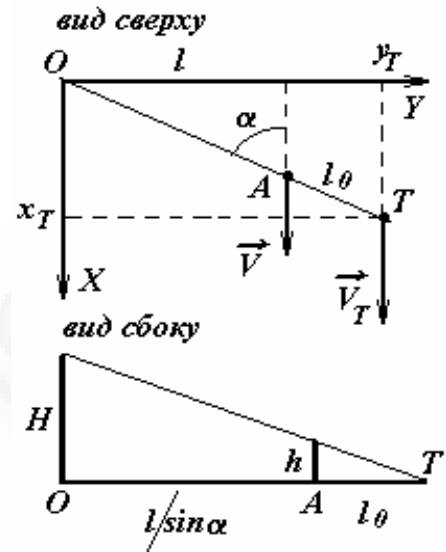
$$T_1 \sin \alpha = m_1 g. \quad (2)$$

Кроме того, при медленном втягивании

$$T_2 = \mu m_2 g, \quad (3)$$

где m_1 и m_2 – массы соответствующих частей веревки BC и CD .

Из (1)-(3), с учетом того, что $m_1 = \frac{m_2}{2}$, имеем

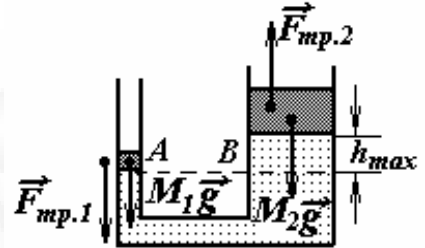


$$\mu = \frac{l}{2} \operatorname{ctg} \alpha.$$

9-3. Различие в уровнях жидкости в коленах пресса возможно благодаря весу самих поршней и сухому трению между поршнями и стенками.

Давление на уровне AB в жидкости должно быть одинаковым в обоих коленах. Пусть поршни разведены на h_{max} , тогда

$$P_A = \frac{M_1 g}{S_1} + \frac{F_{mp1}}{S_1} = P_B = \rho g h_{max} + \frac{M_2 g - F_{mp2}}{S_2}, \quad (1)$$



где M_i и S_i , $i = 1, 2$, массы и поперечные сечения соответственно первого и второго поршней. В положении с h_{min} силы трения поменяют свое направление (поршни будут стремиться «разъехаться»), и уравнение примет вид

$$\frac{M_1 g - F_{mp1}}{S_1} = \rho g h_{min} + \frac{M_2 g + F_{mp2}}{S_2}. \quad (2)$$

Учитывая, что $\frac{M_i g}{S_i} = \rho_i g h_i$, где ρ_i, h_i плотность материала i -того поршня и его толщина, из (1) и (2) имеем

$$2h_1 \eta = (h_{max} + h_{min}) + 2h_2 \eta \Rightarrow h_2 = h_1 - \frac{h_{max} + h_{min}}{2\eta}. \quad (3)$$

Как видно из (3) $h_2 < h_1$, то есть более тонкий поршень окажется «наверху». Самостоятельно проанализируйте случай, когда при переходе от h_{min} к h_{max} поршни меняются «местами».

9-4. В стационарном режиме вся выделяемая на проводнике теплота рассеивается в окружающее пространство, так как его температура не меняется. Будем считать, что отвод теплоты ΔQ происходит с боковой поверхности проводника (то есть пренебрежем теплоотводом с контактов и излучением).

$$\Delta Q = \sigma S \Delta T \Delta t, \quad (1)$$

где σ – некоторый размерный коэффициент, S – площадь боковой поверхности проводника, ΔT – разность температур проводника и окружающего воздуха, Δt – время теплообмена.

Условие равновесия тепловых потоков

$$\frac{U^2}{R} \Delta t = \sigma S \Delta T \Delta t \Rightarrow \frac{U^2 S}{\rho l} = \sigma l 2\pi r \Delta T,$$

где U – напряжение, $R = \rho \frac{l}{S_1}$ – сопротивление проводника, r – радиус проводника, S_1 – площадь его поперечного сечения.

Отсюда выделим неизменный параметр для проводника

$$\frac{U^2 S_1}{\rho \sigma 2\pi r} = l^2 \Delta T \Rightarrow l^2 (1 - \eta)^2 \Delta T_1 = l^2 \Delta T_0,$$

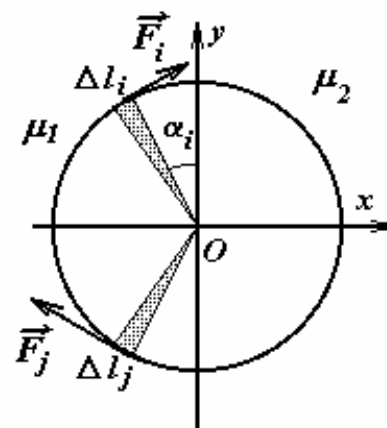
то есть температура проводника увеличится на

$$\delta T = \Delta T_1 - \Delta T_0 = \Delta T_0 \eta \frac{2 - \eta}{(1 - \eta)^2} = 5,6^\circ \text{C}.$$

9-5. Испарение части воды будет происходить за счет теплоты, получаемой при остывании ее основной массы до $t_0 = 100^\circ \text{C}$. Пренебрегая изменением массы остывающей воды, имеем

$$\Delta m \lambda = mc(t_1 - t_0) \Rightarrow \frac{\Delta m}{m} = \frac{c(t_1 - t_0)}{\lambda} = 4 \cdot 10^{-2}.$$

10-1. Для корректного учета действия элементарных сил трения разделим диск (мысленно) на тонкие кольца и рассмотрим одно из них. В свою очередь рассечем кольцо на малые дуги и рассмотрим симметричную относительно оси Ox пару Δl_i и Δl_j . Сумма $\vec{F}_i + \vec{F}_j$ сил трения, вследствие симметрии, параллельна оси Oy , что говорит о том, что равнодействующая всех сил трения также будет параллельна этой оси. Следовательно,



ускорение центра диска будет направлено вдоль границы раздела полуплоскостей вдоль оси OY . Для определения его величины найдем сумму

$$\sum_i F_i \sin \alpha_i = \mu_1 \rho g \sum_i \Delta l_i \sin \alpha_i = \mu_1 \rho g 2R_k, \quad (1)$$

где μ_1 – соответствующий коэффициент трения, $\rho = \frac{m_k}{2\pi R_k}$ – линейная

плотность рассматриваемого кольца, которая представляет собой сумму элементов кольца, принадлежащих левой полуплоскости. Для всего кольца

$$\sum_i F_i \sin \alpha_i = m_k g \frac{\mu_1 - \mu_2}{\pi} = F^k. \quad (2)$$

Суммируя по всем кольцам

$$\sum_k F^k = mg \frac{\mu_1 - \mu_2}{\pi}, \quad (3)$$

где m – масса диска. Формула (3) дает выражение для равнодействующей всех сил трения, действующих на диск. Для ускорения имеем

$$a = g \frac{\mu_1 - \mu_2}{\pi}.$$

10-2. Оторвавшаяся пластинка находится в электрическом поле напряженности

$$E = \frac{E_0}{2} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^2},$$

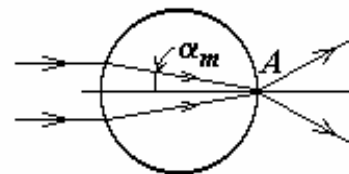
где Q, R – заряд и радиус шарика, E_0 – поле целого шарика (мы учли поле самой пластинки). Следовательно, ускорение оторвавшейся пластинки будет направлено по радиусу от центра шара и равно

$$a = \frac{F}{m} = \frac{Q'E}{m} = \frac{Q^2 S}{32\pi^2 \epsilon_0 m R^4},$$

где учтено, что заряд пластинки $Q' = \frac{S}{4\pi R^2} Q$.

Диэлектрическая проницаемость пластилина в ответ не входит.

10-3. Цифры в задаче подобраны так, что после преломления лучи собираются в точке A . При этом радиус пятна на экране определится лучами, образующими максимальный угол с центральным непреломляющимся лучом. Угол падения в точку A соответствующего луча



$\alpha_m = \frac{r}{2R}$, после преломления (на выходе из шара) он удваивается ($n=2$),

$$\beta_m = \frac{r}{R}.$$

Таким образом

$$a = (l - R) \frac{r}{R} = 2 \text{ см.}$$

10-4. Обозначим силу тока через первый предохранитель i_1 , а через второй - i_2 . Так как предохранители соединены параллельно, то

$$i_1 + i_2 = I$$

$$i_1 R_1 = i_2 R_2,$$

где I - сила тока в общей цепи. Из данной системы легко найти

$$i_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad i_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

Далее необходимо проанализировать возможные варианты: какой из предохранителей перегорит при возрастании тока во внешней цепи раньше и перегорит ли после этого второй (смотри аналогичную задачу 9.2 олимпиады 1990 года). Такой анализ приводит к результату

а) при $\frac{I_2}{I_1} < \frac{R_1}{R_1 + R_2}$ предельное значение силы тока равно I_1 ;

б) при $\frac{R_1}{R_1 + R_2} < \frac{I_2}{I_1} < \frac{R_1}{R_2}$ предельное значение - $I_2 \frac{R_1 + R_2}{R_1}$;

в) при $\frac{R_1}{R_2} < \frac{I_2}{I_1} < \frac{R_1}{R_2} + 1$ предельное значение - $I_1 \frac{R_1 + R_2}{R_2}$;

г) при $\frac{I_2}{I_1} > \frac{R_1}{R_2} + 1$ предельное значение - I_2 .

10-5. С учетом 1-го начала термодинамики имеем

$$\Delta Q = \Delta U + A, \quad (1)$$

где $\Delta U = \frac{3}{2}R\Delta T$ — изменение внутренней энергии газа, A — работа по деформированию пружины, ΔQ — количество теплоты, сообщаемое системе. При малом изменении объема работа вычисляется по формуле

$$\Delta A = P\Delta V = \frac{kV\Delta V}{S^2}, \quad (2)$$

где $P = kV$.

Суммируя, получим

$$A = \sum P_i \Delta V_i = \frac{k}{S^2} \frac{V_2^2 - V_1^2}{2}$$

Из уравнения состояния:

$$PV = RT \Rightarrow \frac{k}{S^2} V^2 = RT. \quad (3)$$

Из (1)-(3) получаем:

$$\Delta Q = \frac{3}{2}R\Delta T + \frac{R\Delta T}{2} = 2R\Delta T \Rightarrow C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = 2R = 16,6 \text{ Дж / моль}.$$

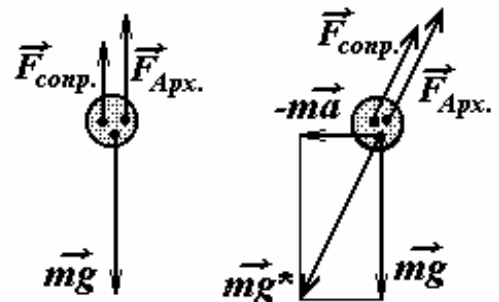
11-1. Так как сила сопротивления зависит от скорости, то по прошествии небольшого промежутка времени шарик будет двигаться равномерно. При движении шарика в покоящемся баке скорость установившегося движения может быть найдена из уравнения

$$m\vec{g} + \vec{F}_{\text{арх}} + \vec{F}_{\text{сопр}} = \vec{0}.$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$(\rho - \rho_0)Vg = \beta v_0^2, \quad (1)$$

где ρ, ρ_0 — плотности шарика и жидкости соответственно, V — объем шарика, β — коэффициент пропорциональности между силой сопротивления и квадратом скорости.



Так как, по условию, бак высокий, можно пренебречь начальным участком движения, на котором скорость шарика изменяется, тогда $v_0 = \frac{h}{\tau_0}$, где h — высота бака. Подставим в (1)

$$(\rho - \rho_0)Vg = \beta \left(\frac{h}{\tau_0} \right)^2. \quad (2)$$

Падение шарика в ускоренно движущемся баке удобно рассматривать в неинерциальной системе отсчета, связанной с баком. В этом случае необходимо учесть силу инерции — $m\vec{a}$ действующую на шарик. (Отметим, что задачу можно решать и в инерциальной системе отсчета, связанной с поверхностью земли).

Можно воспользоваться уравнением (1), в котором следует заменить ускорение свободного падения \vec{g} на эффективное $\vec{g}^* = \vec{g} - \vec{a}$. Шарик будет двигаться вдоль линии, по которой направлен вектор \vec{g}^* , и пройдет до дна путь

$$l = h \frac{g^*}{g} = h \frac{\sqrt{a^2 + g^2}}{g},$$

тогда уравнение аналогичное (2) имеет вид

$$(\rho - \rho_0)V\sqrt{a^2 + g^2} = \beta \left(\frac{gh}{\tau\sqrt{g^2 + a^2}} \right)^2. \quad (3)$$

Разделим почленно (2) на (3)

$$\frac{g}{\sqrt{a^2 + g^2}} = \frac{\tau^2}{\tau_0^2} \frac{g^2}{a^2 + g^2}.$$

Откуда

$$\tau = \tau_0 \left(1 + \frac{a^2}{g^2} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (4)$$

11-2. Процесс испарения заключается в том, что часть молекул жидкости вылетает из ее поверхности. Непосредственно подсчитать количество таких молекул довольно трудно. Однако можно найти количество молекул, попадающих из пара в жидкость. Если жидкость и пар находятся в равновесии (а такой пар называется насыщенным), то количество молекул, покидающих поверхность жидкости, в среднем равно

количеству молекул, попадающих внутрь жидкости. Так как температура и парциальное давление насыщенного пара известны, то можно найти число молекул, попадающих на единицу площади поверхности в единицу времени. Действительно, число ударов молекул газа о площадь S поверхности за время Δt равно

$$N_0 = \frac{1}{4} n v_{cp} S \Delta t, \quad (1)$$

где n — концентрация молекул газа, v_{cp} — средняя скорость молекул. Из уравнения $P = nkT$ можно получить $n = \frac{P}{kT}$, а средняя скорость

$$v_{cp} = \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{kT}{m}}.$$

Из общего числа молекул, падающих на поверхность, только $\eta = 0,04$ задерживается ею, поэтому число молекул, попадающих внутрь жидкости, а следовательно, вылетающих из нее, равно

$$N_1 = \eta N_0 = \frac{\eta P_0 S \Delta t}{\sqrt{2\pi k T m}}. \quad (2)$$

Так как, в данном случае, над жидкостью пар не насыщенный, то концентрация молекул пара меньше, и, по определению влажности φ , $n = \varphi n_0$, где n_0 — концентрация молекул насыщенного пара. Тогда число молекул, попадающих внутрь жидкости, равно

$$N_2 = \frac{\eta \varphi P_0}{\sqrt{2\pi k T m}} S \Delta t. \quad (3)$$

Таким образом, за время Δt жидкость теряет $N = N_1 - N_2$ молекул

$$N = \frac{\eta(1-\varphi)P_0}{\sqrt{2\pi k T m}} S \Delta t. \quad (4)$$

Найдем на сколько изменяется масса жидкости

$$\Delta M = mN = \eta(1-\varphi)P_0 S \Delta t \sqrt{\frac{m}{2\pi k T}},$$

а объем, соответственно, на

$$\Delta V = \frac{\Delta m}{\rho} = \frac{\eta(1-\varphi)P_0}{\rho} S \Delta t \sqrt{\frac{m}{2\pi k T}}.$$

Так как площадь поверхности изменяется по мере высыхания, таким образом величина ΔV не остается постоянной. Однако скорость

изменения высоты уровня жидкости в трубке $\Delta h = \frac{\Delta V}{S}$ постоянна.

Полное изменение высоты равно радиусу трубки r . Поэтому

$$r = \frac{\eta(1-\varphi)P_0}{\rho} \Delta t \sqrt{\frac{\mu}{2\pi RT}},$$

где μ — молярная масса воды, R — универсальная газовая постоянная.

Из этого уравнения получим время испарения:

$$\Delta t = \frac{r\rho}{\eta(1-\varphi)P_0} \sqrt{\frac{2\pi RT}{\mu}} \approx 250 \text{ с}.$$

Отметим, что при решении этой задачи можно было использовать формулу для среднего числа ударов молекул о поверхность, приведенную в школьном учебнике (с коэффициентом $1/6$) и вместо средней скорости пользоваться среднеквадратичной (также используемой в школьном курсе физики) - это не скажется существенно на оценке времени испарения.

11-3. Проводник, находящийся в электрическом поле, является эквипотенциальным, то есть разность потенциалов между двумя любыми точками проводника равна нулю. Так как по условию задачи $l \gg R$, таким образом можно считать шарики уединенными, т. е. пренебречь взаимным влиянием шариков друг на друга. Тогда потенциал поля, создаваемого зарядом шарика, будет равен

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (1)$$

Из соображений симметрии ясно, что заряды крайних шариков равны по величине и противоположны по знаку $q_1 = -q_N$. тогда, по принципу суперпозиции, разность потенциалов между крайними шариками может быть записана в виде

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_0 + (\varphi_N - \varphi_1),$$

где $\Delta\varphi_0 = E(N-1)l$ — разность потенциалов, создаваемая внешним полем E , ($(N-1)l$ — расстояние между крайними шариками); φ_1, φ_N — потенциалы полей, создаваемых индуцированными зарядами этих шариков. Как уже отмечалось, $\Delta\varphi = 0$, поэтому

$$E(N-1)l - \frac{2q_1}{4\pi\epsilon_0 R} = 0.$$

Откуда

$$q_1 = 2\pi\varepsilon_0 RE(N-1)l.$$

11-4. Попытаемся разобраться в сущности проходящих процессов. При движении проводника в магнитном поле на свободные заряды в проводнике действует сила Лоренца, которая заставляет заряды двигаться перпендикулярно векторам индукции магнитного поля \vec{B} и скорости проводника. Наличие этой силы приводит к тому, что на поверхности проводника возникают заряды. Такое движение зарядов будет продолжаться до тех пор, пока сила электрического поля, созданного индуцированными зарядами, не будет компенсировать силу Лоренца. Для металлов время установления такого равновесия чрезвычайно мало ($\approx 10^{-14}$ с). Поэтому можно считать, что поверхностная плотность индуцированных зарядов σ все время соответствует скорости движения проводника v (даже если скорость проводника изменяется). Найдем это соответствие. Сила Лоренца $F_L = evB$. Сила электрического поля

$$F_{эл} = eE = e \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Поэтому

$$\sigma = \varepsilon_0 vB. \quad (1)$$

Так как скорости проводника изменяется, таким образом изменяется и величина σ . Изменение поверхностной плотности заряда обусловлено электрическим током внутри проводника. Сила этого тока

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = S \frac{\Delta \sigma}{\Delta t} = S \varepsilon_0 B \frac{\Delta v}{\Delta t} = S \varepsilon_0 B a,$$

где $S = \pi R^2$ — площадь диска, а a — его ускорение.

Наличие тока приводит к тому, что на диск действует сила Ампера F_A , направленная вертикально. Причем

$$F_A = IBd = S \varepsilon_0 dB^2 a.$$

Тогда уравнение движения диска имеет вид

$$ma = -kx - S \varepsilon_0 dB^2 a$$

или

$$a = -\frac{k}{m + Sd\varepsilon_0 B^2} x.$$

Как видите, это есть уравнение гармонических колебаний, поэтому частота колебаний

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m + Sd\epsilon_0 B^2}}.$$

Решение этой задачи может вызвать много ассоциаций: например, диск можно рассматривать как конденсатор; интересно рассмотреть влияние потерь энергии вследствие выделения джоулевой теплоты. Остановимся на анализе величины

$$m_{эф} = Sd\epsilon_0 B^2.$$

Эта величина имеет размерность массы. Что же это за масса? Обратите внимание, что напряженность электрического поля внутри диска $E = \nu B$,

поэтому $m_{эф} = \frac{Sd\epsilon_0 E^2}{\nu^2} = \frac{2W}{\nu^2}$, где $W = V \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$ — энергия электрического

поля внутри диска, а последнее выражение можно представить в

$$\text{привычной форме } W = \frac{m_{эф} \nu^2}{2}.$$

Иными словами, мы можем приписать некоторую эффективную массу самому электромагнитному полю. Поразмышляйте на эту тему.

11-5. Прежде всего попытаемся разобраться, почему происходит исчезновение интерференционной картины?

Если бы источник света был монохроматическим, то интерференционная картина представляла собой бесконечный ряд чередующихся светлых и темных полос. Ширина полосы зависит от длины волны света. Положение нулевой полосы (т.е. полосы, для которой разность хода равна нулю) не зависит от длины волны. Смещение зеркала способствует тому, что мы наблюдаем интерференционные полосы все более высоких порядков. Поэтому возможные такие положения зеркал, при которых максимум интенсивности интерференционной картины для излучения одной длины волны совпадает с минимумом для другой, при этом интерференционная картина исчезает. При другом положении максимумы совпадают, и интерференционная картина видна. Допустим, мы нашли такое положение. Двигая зеркало, мы изменяем разность хода интерферирующих лучей, если зеркало сместить на величину Δx , разность хода изменится на $2\Delta x$. При очередном появлении интерференционной картины максимумы опять совпадают, при этом, естественно, необходимо, чтобы на вновь приобретенной разности хода

укладывалось целое число n_1 длин волн излучения с длиной волны λ_1 , и целое число n_2 длин волн излучения с длиной волны λ_2 . Так как мы наблюдаем два последовательных проявления интерференционной картины, таким образом числа n_1 и n_2 должны отличаться на единицу. Отсюда следует

$$2\Delta x = n\lambda_1,$$
$$2\Delta x = (n \pm 1)\lambda_2.$$

Откуда следует, что

$$\frac{1}{\lambda_1} \pm \frac{1}{2\Delta x} = \frac{1}{\lambda_2}; \quad \lambda_2 = \frac{\lambda_1}{1 \pm \frac{\lambda_1}{2\Delta x}} \approx \lambda_1 \mp \frac{\lambda_1^2}{2\Delta x} \approx 589 \mp 1 \text{ нм}.$$

Выбрать то или иное решение из условия задачи нельзя. Отметим, что для излучения натрия реально существующее значение $\lambda_2 = 590 \text{ нм}$, что соответствует решению со знаком "+".